1

問題のページへ

出た目	1	2	3	4	5	6
回転角	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{6}$

(1)　回転した角の合計が $\frac{\pi}{2}$ になる目の出方は，右表より，

(i)　1 回振ったとき　2

(ii)　2 回振ったとき　3→6, 4→4, 6→3

(iii)　3 回振ったとき　6→6→6

(2)　$P_4=P_0$ となるのは，4 回振って，回転した角の合計が 2π または 4π の場合である。

(i)　回転した角の合計が 2π になるとき

出た目を a, b, c, d として，$(a,\ b,\ c,\ d)$ の組は, $a\leqq b\leqq c\leqq d$ では,

$(1,\ 2,\ 4,\ 4)$，$(1,\ 2,\ 3,\ 6)$，$(1,\ 3,\ 3,\ 3)$，$(2,\ 2,\ 2,\ 2)$

すると，目の出方は，$\dfrac{4!}{2!}+4!+\dfrac{4!}{3!}+1=41$ 通りとなる。

(ii)　回転した角の合計が 4π になるとき

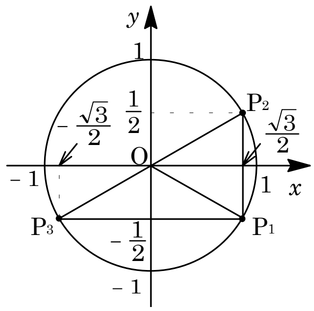
出た目が $(1,\ 1,\ 1,\ 1)$ の場合のみで, 1 通りである。

(i)(ii)より，$P_4=P_0$ となる目の出方は，$41+1=42$ 通りである。

(3)　条件より，原点 O に対し，$\angle P_1OP_2=\dfrac{\pi}{3}$ なので，

$P_1\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$，$P_2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$としても一般性は失わない。

そこで，O を中心とし，OP_2 を角 $\dfrac{\pi}{k}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$ だけ回転して OP_3 を決めるとき，$\triangle P_1P_2P_3$ の面積が最大になるのは，$P_3\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$のとき，すなわち出た目 k が 1 のときである。



[解 説]

場合の数を漏れなく数え上げる問題です。特に, (2)の(ii)が要注意です。

2

問題のページへ

(1) 条件より，行列 $X=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ に対して，$X^2=(p+s)X-(ps-qr)E$ ………(＊)

まず，A^{-1} の存在を仮定すると，$AB=O$ より，

$A^{-1}AB=A^{-1}O$，$B=O$

すると，これは $B\neq O$ に反することより，A^{-1} は存在しない。

これより，$\det A=0$ となり，行列 A の対角成分の和を α とすると, (＊)より,

$A^2=\alpha A$

同様にして，B^{-1} の存在を仮定すると，$BA=O$ より，

$B^{-1}BA=B^{-1}O$，$A=O$

すると，これは $A\neq O$ に反することより，B^{-1} は存在しない。

これより，$\det B=0$ となり，行列 B の対角成分の和を β とすると, (＊)より,

$B^2=\beta B$

(2) 条件より，$A^2=A$，$B^2=B$，$AB=BA=O$ から，

$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2=A+B$

ここで，$X=A+B=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とおくと，$X^2=X$ ………①

また，$\alpha=\beta=1$ より，$p+s=\alpha+\beta=2$ となり, (＊)より,

$X^2=2X-(ps-qr)E$ ………②

①②より，$X=2X-(ps-qr)E$，$X=(ps-qr)E$

①に代入すると，$(ps-qr)^2=ps-qr$

ここで，$ps-qr=0$ と仮定すると $X=O$ となり，$p+s=2$ に反することから，$ps-qr\neq 0$ である。

したがって，$ps-qr=1$ となり，$X=E$ すなわち $A+B=E$ である。

[解 説]

行列の有名問題で，類題が数多く出ています。演習経験が必須の 1 題です。

3

問題のページへ

(1) 初項x^2，公比$\dfrac{1}{1+x^2-x^4}$である無限等比級数が収束する条件は,

(i) 初項が 0 のとき

$x^2=0$から，$x=0$

(ii) 公比の絶対値が 1 より小のとき

$\left|\dfrac{1}{1+x^2-x^4}\right|<1$から，$1<|1+x^2-x^4|$となり，$(1+x^2-x^4)^2>1$

$$\{(1+x^2-x^4)-1\}\{(1+x^2-x^4)+1\}>0,\ (x^4-x^2)(x^4-x^2-2)>0$$

$$x^2(x+1)(x-1)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x^2+1)>0$$

よって，$x<-\sqrt{2}$，$-1<x<0$，$0<x<1$，$\sqrt{2}<x$

(i)(ii)より，$x<-\sqrt{2}$，$-1<x<1$，$\sqrt{2}<x$

(2) 与えられた無限等比級数が収束するとき，その和$f(x)$は，$x\neq 0$では,

$$f(x)=\frac{x^2}{1-\dfrac{1}{1+x^2-x^4}}=\frac{x^2(1+x^2-x^4)}{x^2-x^4}=\frac{x^4-x^2-1}{x^2-1}$$

ここで，$h(x)=f(\sqrt{|x|})-|x|$より,

$$h(x)=\frac{x^2-|x|-1}{|x|-1}-|x|=\frac{(x^2-|x|-1)-(x^2-|x|)}{|x|-1}=-\frac{1}{|x|-1}$$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to 0}h(x)=1$である。

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-\alpha}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{|x|-1}-1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{-|x|}{x(|x|-1)}$より,

$$\lim_{x\to +0}\frac{h(x)-\alpha}{x}=\lim_{x\to +0}\frac{-x}{x(x-1)}=\lim_{x\to +0}\frac{-1}{x-1}=1$$

$$\lim_{x\to -0}\frac{h(x)-\alpha}{x}=\lim_{x\to -0}\frac{x}{x(-x-1)}=\lim_{x\to -0}\frac{1}{-x-1}=-1$$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-\alpha}{x}$は存在しない。

[解 説]

無限等比級数の収束条件についての基本問題です。

4

問題のページへ

(1)　$f(x)=2(x-1)e^{1-\frac{1}{2}x}$ に対して,

$$f'(x)=2e^{1-\frac{1}{2}x}+2(x-1)\left(-\frac{1}{2}\right)e^{1-\frac{1}{2}x}$$

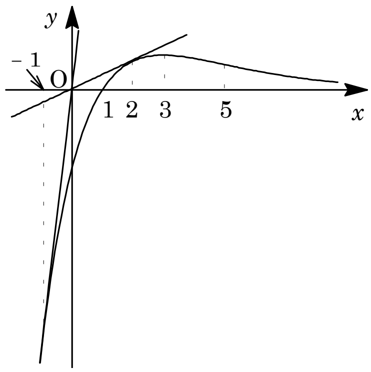
$$=(3-x)e^{1-\frac{1}{2}x}$$

$$f''(x)=-e^{1-\frac{1}{2}x}+(3-x)\left(-\frac{1}{2}\right)e^{1-\frac{1}{2}x}$$

$$=\frac{1}{2}(x-5)e^{1-\frac{1}{2}x}$$

x	$\cdots$	3	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$
$f''(x)$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↘

また, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ より, グラフの概形は右図のようになる。



さて, 点$(t,\ f(t))$における接線の方程式は,

$$y-2(t-1)e^{1-\frac{1}{2}t}=(3-t)e^{1-\frac{1}{2}t}(x-t)$$

原点を通る条件は,

$$-2(t-1)e^{1-\frac{1}{2}t}=(3-t)e^{1-\frac{1}{2}t}(-t)$$

$$2(t-1)=t(3-t),\ t^2-t-2=0,\ (t+1)(t-2)=0$$

よって, 接点の x 座標は$t=-1,\ 2$となり, 接線の傾きは, それぞれ

$$f'(-1)=4e^{\frac{3}{2}},\ f'(2)=1$$

以上より, $C: y=f(x)$と$l: y=ax$が 2 個の共有点をもつ a の条件は, 図から,

$$0<a<1,\ 4e^{\frac{3}{2}}<a$$

(2)　$a=1$のとき, 接点は$(2,\ 2)$より, C, l, および x 軸で囲まれた領域の面積 S は,

$$S=\frac{1}{2}\cdot 2^2-\int_1^2 2(x-1)e^{1-\frac{1}{2}x}dx=2-2\Big[-2(x-1)e^{1-\frac{1}{2}x}\Big]_1^2-4\int_1^2 e^{1-\frac{1}{2}x}dx$$

$$=2+4-4\Big[-2e^{1-\frac{1}{2}x}\Big]_1^2=6+8(1-\sqrt{e})=14-8\sqrt{e}$$

[解 説]

(1)では, 定数 a を分離して条件を求めようかと考えましたが, (2)の設問まで考え合わせると, 上の方法に落ち着きました。