1

問題のページへ

(1)　3 人とも n を選ばない確率は$\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^3$より，少なくとも 1 人が n を選ぶ確率は,

$$1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^3=\frac{3n^2-3n+1}{n^3}$$

(2)　$a=b$ となる確率は, c が任意なので，$\left(\dfrac{1}{n}\right)^2\times n\times 1=\dfrac{1}{n}$

(3)　$a=b\neq c$ となる確率は，$\left(\dfrac{1}{n}\right)^2\times n\times\dfrac{n-1}{n}=\dfrac{n-1}{n^2}$ である。

また，$a=c\neq b$，$b=c\neq a$ の場合の確率も，同じく $\dfrac{n-1}{n^2}$ となる。

よって, 2 人が同じ数，他の 1 人が異なる数を選ぶ確率は，$\dfrac{3(n-1)}{n^2}$ である。

(4)　$a<b<c$ となる場合は ${}_n\mathrm{C}_3$ 通りあるので，その確率は,

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_3}{n^3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{6n^3}=\frac{(n-1)(n-2)}{6n^2}$$

[解　説]

不気味なほど基本的な設問 4 題で，構成されています。

2

問題のページへ

(1)　漸化式 $a_{n+1}=pa_n+\dfrac{q-p}{2}q^{n-1}$ を変形すると，

$$a_{n+1}-\frac{1}{2}q^n=p\left(a_n-\frac{1}{2}q^{n-1}\right)$$

よって，$a_n-\dfrac{1}{2}q^{n-1}=\left(a_1-\dfrac{1}{2}q^0\right)p^{n-1}=\dfrac{1}{2}p^{n-1}$ となり，

$$a_n=\frac{1}{2}p^{n-1}+\frac{1}{2}q^{n-1}$$

(2)　$b_n=(-1)^{n-1}\log\dfrac{n+2}{n}=(-1)^{n-1}\{\log(n+2)-\log n\}$ に対し，n を偶奇に分けて，

$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$ を求める。m を自然数とするとき，

(i)　$n=2m$ のとき

$$\begin{aligned}S_{2m}&=(b_1+b_3+\cdots+b_{2m-1})+(b_2+b_4+\cdots+b_{2m})\\&=-\log 1+\log(2m+1)-\{-\log 2+\log(2m+2)\}\\&=\log 2+\log\frac{2m+1}{2m+2}=\log 2+\log\left(1-\frac{1}{2m+2}\right)\end{aligned}$$

これより, $n\to\infty$ のとき $m\to\infty$ より，$S_{2m}\to\log 2$

(ii)　$n=2m-1$ のとき

$$S_{2m-1}=S_{2m}-b_{2m}=S_{2m}+\log\frac{2m+2}{2m}=S_{2m}+\log\left(1+\frac{1}{m}\right)$$

これより, $n\to\infty$ のとき $m\to\infty$ より，$S_{2m-1}\to\log 2$

(i)(ii)より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\log 2$

[解　説]

(1)については，文系に推測→帰納法の誘導のついた類題が出ています。なお，上記の解法は「ピンポイントレクチャー」を参照してください。

3

問題のページへ

(1) 部分積分を用いて,

$$\int_0^a e^{a-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n dx=-\left[e^{a-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right]_0^a+\int_0^a e^{a-x}\,n\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}dx$$

$$=-\left(1+\frac{a}{n}\right)^n+e^a+\int_0^a e^{a-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}dx$$

$$=\int_0^a e^{a-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}dx+e^a-\left(1+\frac{a}{n}\right)^n\cdots\cdots\cdots①$$

(2) $a\geqq 0,\ n\geqq 1$ より，$1+\dfrac{a}{n}\geqq 1$ となり，$\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^{n-1}\leqq\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n\cdots\cdots\cdots②$

また，①より，$e^a-\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n=\displaystyle\int_0^a e^{a-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n dx-\int_0^a e^{a-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}dx$

$$=\int_0^a e^{a-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}\left(1+\frac{x}{n}-1\right)dx$$

$$=\frac{1}{n}\int_0^a xe^{a-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}dx\geqq 0\cdots\cdots\cdots③$$

②③より，$\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^{n-1}\leqq\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n\leqq e^a\cdots\cdots\cdots④$

(3) ④より, $0\leqq x\leqq a$ において，$\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{n-1}\leqq e^x$ となり,

$$\frac{1}{n}\int_0^a xe^{a-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}dx\leqq\frac{1}{n}\int_0^a xe^{a-x}e^x dx=\frac{e^a}{n}\int_0^a x\,dx=\frac{a^2e^a}{2n}$$

よって，③から，$e^a-\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n\leqq\dfrac{a^2e^a}{2n}$

[解 説]

定積分と不等式の証明問題です。細かく付いた誘導に従えば，式変形の方向を見失うことはないでしょう。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　まず，$x=\dfrac{\cos t}{1-\sin t}$ より，$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{-\sin t(1-\sin t)+\cos^2 t}{(1-\sin t)^2}=\dfrac{1-\sin t}{(1-\sin t)^2}=\dfrac{1}{1-\sin t}$

また，$y=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$ より，$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{\cos t(1-\cos t)-\sin^2 t}{(1-\cos t)^2}=\dfrac{\cos t-1}{(1-\cos t)^2}=-\dfrac{1}{1-\cos t}$

よって，$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1-\sin t}{1-\cos t}$ となる。

さて，点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta},\ \dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)$における C の接線 l の方程式は,

$$y-\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=-\frac{1-\sin\theta}{1-\cos\theta}\left(x-\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\right)$$

$$y=-\frac{1-\sin\theta}{1-\cos\theta}x+\frac{\sin\theta+\cos\theta}{1-\cos\theta}\ \cdots\cdots\cdots①$$

(2)　①と y 軸との交点の y 座標は，$y=\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{1-\cos\theta}$ となる。

また, ①と x 軸との交点の x 座標は,

$$-\frac{1-\sin\theta}{1-\cos\theta}x+\frac{\sin\theta+\cos\theta}{1-\cos\theta}=0,\quad x=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{1-\sin\theta}$$

すると, C の接線 l と x 軸, y 軸で囲まれた三角形の面積 S は,

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\theta+\cos\theta}{1-\sin\theta}\cdot\frac{\sin\theta+\cos\theta}{1-\cos\theta}=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)^2}{2(1-\sin\theta-\cos\theta+\sin\theta\cos\theta)}$$

ここで，$\alpha=\sin\theta+\cos\theta$ とおくと，$\alpha^2=1+2\sin\theta\cos\theta$ より，

$$2\sin\theta\cos\theta=\alpha^2-1$$

よって，$S=\dfrac{\alpha^2}{2-2\alpha+\alpha^2-1}=\left(\dfrac{\alpha}{\alpha-1}\right)^2\cdots\cdots\cdots②$

(3)　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$より，$1<\alpha\leqq\sqrt{2}$ となる。

すると，$\dfrac{\alpha}{\alpha-1}=1+\dfrac{1}{\alpha-1}\geqq 1+\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=2+\sqrt{2}$ となり，②より，

$$S\geqq(2+\sqrt{2})^2=6+4\sqrt{2}$$

[解 説]

パラメータ曲線の接線についての基本問題です。計算量も少なめです。