1

問題のページへ

(1)　A と B が対戦して, A が k のカードで勝つのは, B が $k-1$ 以下のカードのときであり, その確率 p_k は,

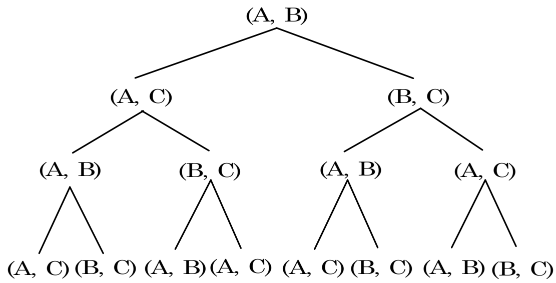
$$p_k=\frac{k-1}{13\cdot 12}\quad(2\leqq k\leqq 13)$$

よって, A が勝つ確率は,

$$\sum_{k=2}^{13}p_k=\sum_{k=2}^{13}\frac{k-1}{13\cdot 12}=\sum_{k=1}^{12}\frac{k}{13\cdot 12}=\frac{1}{13\cdot 12}\cdot\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 13=\frac{1}{2}$$

(2)　(1)より, 対戦の結果, 一方が勝者となる確率は $\frac{1}{2}$ ずつである。

さて, 4 回目までの対戦をまとめると, 右図のようになる。



4 回目の対戦に A が出場するのは, (A, C)が 3 通り, (A, B)が 2 通りの合わせて 5 通りあるので, この確率は,

$$5\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{8}$$

(3)　5 回の対戦を行うとき, A が一番先に連勝するのは,

(i)　勝者が A→A のとき　この場合の確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

(ii)　勝者が A→C→B→A→A のとき　この場合の確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$

(iii) 勝者が B→C→A→A のとき　この場合の確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$

(i)(ii)(iii)より, A が一番先に連勝する確率は,

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{32}+\frac{1}{16}=\frac{11}{32}$$

[解 説]

巴戦を題材にした有名問題です。(1)は丁寧に記述しましたが, 引き分けはないので, A が勝つ確率は明らかに $\frac{1}{2}$ です。

2

問題のページへ

(1)　$f(x)=x^3-3a^2x-b$ より，$f'(x)=3(x+a)(x-a)$

(i)　$a=0$ のとき

$f(x)=0$ すなわち $x^3=b$ の解がすべて実数解である条件は $b=0$ である。

このとき，解は $x=0$ より，区間 $-1\leqq x\leqq 1$ に含まれている。

(ii)　$a>0$ のとき

右表の $f(x)$ の増減より，$f(x)=0$ のすべての解が実数解である条件は，

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$$f(-a)=2a^3-b\geqq 0$$
$$f(a)=-2a^3-b\leqq 0$$

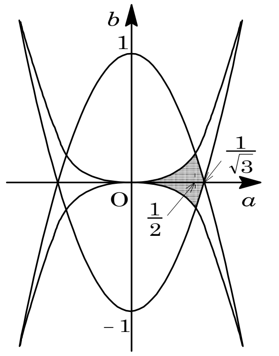
また，すべての解が区間 $-1\leqq x\leqq 1$ に含まれている条件は, $a\leqq 1$ で,

$$f(-1)=-1+3a^2-b\leqq 0,\quad f(1)=1-3a^2-b\geqq 0$$

以上まとめると, $0<a\leqq 1$，$-2a^3\leqq b\leqq 2a^3$，$3a^2-1\leqq b\leqq -3a^2+1$

(i)(ii)より, $a\leqq 1$，$-2a^3\leqq b\leqq 2a^3$，$3a^2-1\leqq b\leqq -3a^2+1$ ………(＊)

(2)　不等式(＊)を満たす領域 D を ab 平面上に図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



また，領域 D は a 軸に関して対称であり，この面積を S とすると，

$$S=2\int_0^{\frac{1}{2}}2a^3da+2\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}(-3a^2+1)da$$
$$=\Big[\,a^4\,\Big]_0^{\frac{1}{2}}+2\Big[\,-a^3+a\,\Big]_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$
$$=\frac{1}{16}+2\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}-\frac{3}{8}\right)=-\frac{11}{16}+\frac{4}{9}\sqrt{3}$$

[解 説]

グラフを念頭に置きながら解いていく微分法の 3 次方程式への応用問題です。

3

問題のページへ

(1) 行列 A で表される 1 次変換によって，点 $(x,\ y)$ は点 $(x',\ y')$ に移るとする。

さて, t を任意の実数として，放物線 $C: y=x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ とすると,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} at+bt^2 \\ ct+dt^2 \end{pmatrix}$$

ここで，条件より，$y'=x'^2$ なので,

$$ct+dt^2=(at+bt^2)^2,\ \ b^2t^4+2abt^3+(a^3-d)t^2-ct=0\cdots\cdots\cdots①$$

①がどんな t に対しても成立する条件は,

$$b^2=0,\ \ ab=0,\ \ a^2-d=0,\ \ c=0$$

よって，$d=a^2$，$b=c=0$

(2) 線分 QQ' の傾きが -1 より，直線 l の傾きは 1 となり，その方程式は,

$$y+1=x-1,\ \ x-y-2=0$$

さて，$\mathrm{P}'(x',\ y')$ とおくと,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t-\alpha t^2 \\ t+\alpha t^2 \end{pmatrix}$$

これより，$\mathrm{P}'(t-\alpha t^2,\ t+\alpha t^2)$ となり,

$$\mathrm{P'Q}=\sqrt{(t-\alpha t^2+1)^2+(t+\alpha t^2-1)^2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{t^2+(\alpha t^2-1)^2}$$

また，P' と l の距離を h とすると,

$$h=\frac{|(t-\alpha t^2)-(t+\alpha t^2)-2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}|\alpha t^2+1|$$

条件より，$\mathrm{P'Q}=h$ なので，$\sqrt{t^2+(\alpha t^2-1)^2}=|\alpha t^2+1|$

$$t^2+(\alpha t^2-1)^2=(\alpha t^2+1)^2,\ (1-4\alpha)t^2=0\cdots\cdots\cdots②$$

②がどんな t に対しても成立する条件は，$1-4\alpha=0$ すなわち $\alpha=\dfrac{1}{4}$ である。

[解　説]

1 次変換の基本題です。(2)は題意がやや曖昧ですが，どんな P に対しても $\mathrm{P'Q}=h$ と解釈して解いています。

4

問題のページへ

(1)　$f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}\ (x>0)$ に対して,

$$f'(x)=\sin\frac{1}{x}+x\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$$

さて, $\dfrac{1}{x}=t$, $f'(x)=g(t)$ とおくと, $x\geqq\dfrac{3}{4\pi}$ より $0<t\leqq\dfrac{4}{3}\pi$ となり,

$$g(t)=\sin t-t\cos t$$

$$g'(t)=\cos t-\cos t+t\sin t=t\sin t$$

すると, $g(t)$ の増減は右表のようになり,

t	0	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{4}{3}\pi$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$$g\left(\frac{4}{3}\pi\right)=\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}>2-\frac{\sqrt{3}}{2}>0$$

$$\lim_{t\to+0}g(t)=0$$

よって, $g(t)>0\ \left(0<t\leqq\dfrac{4}{3}\pi\right)$, すなわち $f'(x)>0\ \left(x\geqq\dfrac{3}{4\pi}\right)$ である。

(2)　まず, $b>a$ のとき, $b=a$ のときに場合分けをする。

(i)　$b>a>0$ のとき

$b\geqq\dfrac{2}{\pi}>\dfrac{3}{4\pi}$ より, (1)から, $x\geqq b$ で $f(x)$ は単調に増加し, しかも,

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$$

よって, $f(b)<1$ となり, $(b-a)f(b)<b-a$ ………①

また, $x>0$ において, $f(x)$ は連続なので, 積分の平均値の定理より,

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(c)\quad(a<c<b)\ \cdots\cdots\cdots②$$

(i-i)　$c\geqq\dfrac{2}{\pi}$ のとき

$\dfrac{2}{\pi}>\dfrac{3}{4\pi}$ なので, $x\geqq c$ で $f(x)$ は単調に増加し, $f(c)<f(b)$

(i-ii)　$0<c<\dfrac{2}{\pi}$ のとき

$f\left(\dfrac{2}{\pi}\right)=\dfrac{2}{\pi}$ となり, $b\geqq\dfrac{2}{\pi}>\dfrac{3}{4\pi}$ より,

$$f(c)\leqq|f(c)|=\left|c\sin\frac{1}{c}\right|\leqq c<\frac{2}{\pi}=f\left(\frac{2}{\pi}\right)\leqq f(b)$$

(i-i)(i-ii)のいずれの場合も, $(b-a)f(c)<(b-a)f(b)$ ………③

②③より, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx<(b-a)f(b)$ ………④

①④をまとめると,

$$\int_a^b f(x)dx<(b-a)f(b)<b-a$$

(ii)　$b=a>0$ のとき

$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)f(b)=b-a=0$ より，成立している。

(i)(ii)より，$\int_a^b f(x)\,dx \leqq (b-a)f(b) \leqq b-a$

[解 説]

(2)では，積分の平均値の定理が関係しているというのは，証明すべき不等式から推測できますが，それ以外にもう 1 つ，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$ がポイントとなっています。この設問はかなりハイレベルです。