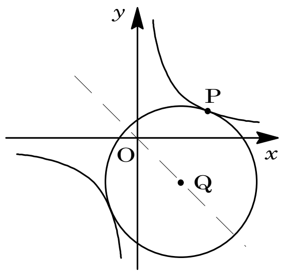
$\boxed{1}$

問題のページへ



(1)　$C_1 : y=\dfrac{1}{x}$ に対して，$y'=-\dfrac{1}{x^2}$

$\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$における法線は，その傾きが p^2 より，

$$y-\frac{1}{p}=p^2(x-p)$$

よって，$y=p^2x-p^3+\dfrac{1}{p}$ ………①

(2)　双曲線 C_1 と，中心が $\mathrm{Q}(q,\ -q)$，半径が r の円 C_2 は，

直線 $y=-x$ に関して対称なので，C_1 と C_2 が 2 個の共有点をもつのは，C_1 と C_2 が接するときである。

すなわち，接点 P における C_1 の法線が点 Q を通る場合となり，①より，

$$-q=p^2q-p^3+\frac{1}{p},\ \ p(p^2+1)q-(p^2+1)(p^2-1)=0$$

$p^2+1>0$ から，$pq-p^2+1=0$，$p-\dfrac{1}{p}=q$ ………②

さて，$r^2=\mathrm{PQ}^2=(p-q)^2+\left(\dfrac{1}{p}+q\right)^2=2q^2-2pq+\dfrac{2q}{p}+p^2+\dfrac{1}{p^2}$

$$=2q^2-2q\left(p-\frac{1}{p}\right)+\left(p-\frac{1}{p}\right)^2+2$$

②より，$r^2=2q^2-2q^2+q^2+2=q^2+2$

$r>0$ から，$r=\sqrt{q^2+2}$

[解 説]

②式を導くのがポイントです。なお，文系で類題が出ています。ただし，アプローチの方法は異なっています。

2

問題のページへ

(1)　$f(x)=\dfrac{\log(x+1)}{x}$ に対して，

$$f'(x)=\frac{\dfrac{x}{x+1}-\log(x+1)}{x^2}=\frac{x-(x+1)\log(x+1)}{x^2(x+1)}$$

(2)　$g(x)=x-(x+1)\log(x+1)$ とおくと，

$$g'(x)=1-(x+1)\frac{1}{x+1}-\log(x+1)=-\log(x+1)$$

$x>0$ において，$g'(x)<0$ となるので，

$$g(x)<g(0)=0$$

これより，$f'(x)<0$ となり，$x>0$ において，$f(x)$ は単調に減少する。

すると，$0<a<b$ に対して，$f(a)>f(b)$ となり，

$$\frac{\log(a+1)}{a}>\frac{\log(b+1)}{b}，\ \log(a+1)^b>\log(b+1)^a$$

よって，$(a+1)^b>(b+1)^a$

[解 説]

関数の単調性と不等式の証明をリンクさせた有名問題です。類した過去問は数え切れません。

3

問題のページへ

(1) 条件より，$A_2=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 2+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 11\\ 0 & 9\end{pmatrix}$

$$A_3=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 2-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 11\\ 0 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 38\\ 0 & 9\end{pmatrix}$$

よって，$b_3=38$

(2) $B_n=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 2+(-1)^n\end{pmatrix}$とおくと，$A_{2n+1}=B_{2n+1}A_{2n}=B_{2n+1}B_{2n}A_{2n-1}$

ここで，$B_{2n+1}B_{2n}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 12\\ 0 & 3\end{pmatrix}$より，

$$\begin{pmatrix}a_{2n+1} & b_{2n+1}\\ c_{2n+1} & d_{2n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 12\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{2n-1} & b_{2n-1}\\ c_{2n-1} & d_{2n-1}\end{pmatrix}$$

$$b_{2n+1}=b_{2n-1}+12d_{2n-1}\cdots\cdots\text{①},\quad d_{2n+1}=3d_{2n-1}\cdots\cdots\text{②}$$

$d_1=3$から，②より，$d_{2n-1}=3\cdot 3^{n-1}=3^n$

①に代入して，$b_{2n+1}=b_{2n-1}+12\cdot 3^n$から，

$$b_{2n+1}=b_1+\sum_{k=1}^{n}12\cdot 3^k=2+\frac{12\cdot 3(3^n-1)}{3-1}=2\cdot 3^{n+2}-16$$

(3) (2)と同様にして，$A_{2n+2}=B_{2n+2}B_{2n+1}A_{2n}$

ここで，$B_{2n+2}B_{2n+1}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 0 & 3\end{pmatrix}$より，

$$\begin{pmatrix}a_{2n+2} & b_{2n+2}\\ c_{2n+2} & d_{2n+2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{2n} & b_{2n}\\ c_{2n} & d_{2n}\end{pmatrix}$$

$$b_{2n+2}=b_{2n}+6d_{2n}\cdots\cdots\text{③},\quad d_{2n+2}=3d_{2n}\cdots\cdots\text{④}$$

$d_2=9$から，④より，$d_{2n}=9\cdot 3^{n-1}=3^{n+1}$

③に代入して，$b_{2n+2}=b_{2n}+6\cdot 3^{n+1}$から，

$$b_{2n}=b_2+\sum_{k=1}^{n-1}6\cdot 3^{k+1}=11+\frac{6\cdot 9(3^{n-1}-1)}{3-1}=3^{n+2}-16\quad(n\geqq 2)$$

以上より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_{2n+1}}{b_{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 3^{n+2}-16}{3^{n+2}-16}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{16}{3^{n+2}}}{1-\frac{16}{3^{n+2}}}=2$

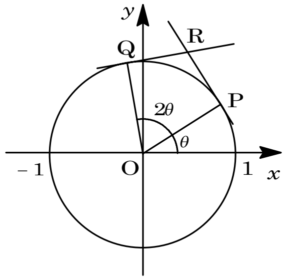
[解 説]

一般項を推測するのは難しそうなので，成分に関する漸化式を立てました。(2)の設問から, n を偶奇に分けて計算しています。

4

問題のページへ

(1) 点 $P(\cos\theta,\ \sin\theta)$, $Q(\cos 3\theta,\ \sin 3\theta)$ における接線の方程式は, それぞれ,



$$x\cos\theta + y\sin\theta = 1,\ x\cos 3\theta + y\sin 3\theta = 1$$

この 2 本の接線の交点 $R(\alpha,\ \beta)$ は,

$$\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta = 1,\ \alpha\cos 3\theta + \beta\sin 3\theta = 1$$

まとめると, $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \cos 3\theta & \sin 3\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

さて, $\Delta = \cos\theta\sin 3\theta - \sin\theta\cos 3\theta = \sin(3\theta - \theta) = \sin 2\theta$

すると, $\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ より, $\sin 2\theta > 0$ なので,

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin 2\theta}\begin{pmatrix} \sin 3\theta & -\sin\theta \\ -\cos 3\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって, $\alpha = \dfrac{1}{\sin 2\theta}(\sin 3\theta - \sin\theta) = \dfrac{1}{2\sin\theta\cos\theta}\cdot 2\cos 2\theta\sin\theta = \dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$

$$\beta = \frac{1}{\sin 2\theta}(-\cos 3\theta + \cos\theta) = \frac{1}{\sin 2\theta}\cdot 2\sin 2\theta\sin\theta = 2\sin\theta$$

(2) (1)より, $x = \dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$, $y = 2\sin\theta$ となり,

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{-2\sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

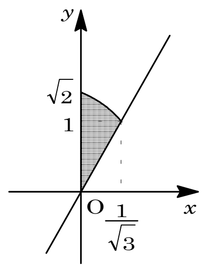
$$= \frac{-4\sin\theta\cos^2\theta + (2\cos^2\theta - 1)\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{-\sin\theta(2\cos^2\theta + 1)}{\cos^2\theta}$$

$$\frac{dy}{d\theta} = 2\cos\theta$$

θ	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{dx}{d\theta}$		$-$	
x	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	↘	0
$\frac{dy}{d\theta}$		$+$	
y	1	↗	$\sqrt{2}$

よって, 点 R の軌跡は右図のようになり, 求める網点部の面積を S とすると,



$$S = \int_1^{\sqrt{2}} x\,dy + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}\cdot 2\cos\theta\,d\theta + \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$= \Big[\sin 2\theta\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} + \frac{\sqrt{3}}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

[解 説]

和積公式を利用して, 点 R の座標を整理しておかないと, 積分の実行が困難になってきます。また, (2)の面積計算は, 計算量を考えると, y 軸方向で積分すべきです。