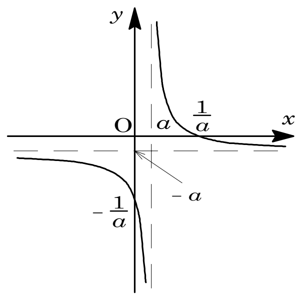
1

問題のページへ

(1)　分数関数 $y=\dfrac{ax-1}{a-x}$ に対して,

$$y=\frac{-a(a-x)+a^2-1}{a-x}=-a+\frac{-a^2+1}{x-a}$$



(i)　$-a^2+1>0$ $(0<a<1)$ のとき

右図より, $x \geqq 0$ のとき, y のとりうる値の範囲は,

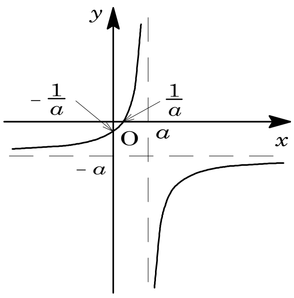
$$y \leqq -\frac{1}{a},\ -a<y$$

(ii)　$-a^2+1=0$ $(a=1)$ のとき

$$y=\frac{x-1}{1-x}=-1\ (x\neq 1)$$

よって, $x \geqq 0$ のとき, $y=-1$

(iii)　$-a^2+1<0$ $(a>1)$ のとき



右図より, $x \geqq 0$ のとき, y のとりうる値の範囲は,

$$y<-a,\ -\frac{1}{a} \leqq y$$

(2)　まず, $(x+y+z)^2 \leqq 3(x^2+y^2+z^2)$ の証明をする。

右辺と左辺の差をとり,

$$\begin{aligned}3(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2&=2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx\\&=(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geqq 0\end{aligned}$$

よって, $(x+y+z)^2 \leqq 3(x^2+y^2+z^2)$ ………(＊)

等号は, $x-y=y-z=z-x=0$, すなわち $x=y=z$ のときに成立する。

さて, $x^2+y^2+z^2 \leqq a$ が成立するとき, (＊)より,

$$(x+y+z)^2 \leqq 3a,\ -\sqrt{3a} \leqq x+y+z \leqq \sqrt{3a}$$

なお, 等号の成立するのは, $x=y=z=\pm\dfrac{\sqrt{3a}}{3}$ のときである。

このとき, $x+y+z \leqq a$ が成立する条件は,

$$\sqrt{3a} \leqq a,\ 3a \leqq a^2,\ 3 \leqq a$$

よって, 求める最小の正の実数 a は 3 である。

[解 説]

第 1 問は互いに関連のない小問 2 題です。意表を突いた出題です。

© 電送数学舎 2005

2

問題のページへ

(1)　$a_1 = a > 0$，$b_1 = b > 0$ であり，条件から，

$$a_{n+1} = \frac{2a_nb_n + a_n{}^2}{a_n{}^2 + 5a_nb_n} \cdots\cdots\cdots ①,\quad b_{n+1} = \frac{3a_nb_n}{a_n{}^2 + 5a_nb_n} \cdots\cdots\cdots ②$$

よって，①②より，帰納的に $a_n > 0$，$b_n > 0$ である。

すると，①②から，

$$a_{n+1} = \frac{2b_n + a_n}{a_n + 5b_n} \cdots\cdots\cdots ①',\quad b_{n+1} = \frac{3b_n}{a_n + 5b_n} \cdots\cdots\cdots ②'$$

これより，$c_{n+1} = \dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \dfrac{2b_n + a_n}{a_n + 5b_n} \cdot \dfrac{a_n + 5b_n}{3b_n} = \dfrac{2b_n + a_n}{3b_n} = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}c_n$

$$c_{n+1} - 1 = \frac{1}{3}(c_n - 1)$$

よって，$c_n - 1 = (c_1 - 1)\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$ から，$c_n = 1 + \left(\dfrac{a}{b} - 1\right)\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

(2)　(1)より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} c_n = 1$ となり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1$

①′から，$a_{n+1} = \dfrac{2 + \dfrac{a_n}{b_n}}{\dfrac{a_n}{b_n} + 5} = \dfrac{2 + c_n}{c_n + 5}$ となり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{2+1}{1+5} = \frac{1}{2}$ から，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$$

また，$b_n = \dfrac{a_n}{c_n}$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{c_n} = \frac{1}{2}$

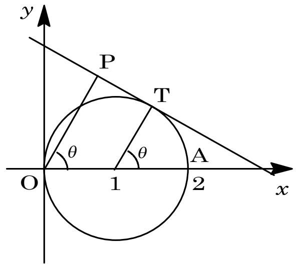
[解 説]

漸化式①と②は，分母と分子を a_n で割った①′と②′と同じ式です。この点に，数列 $\{c_n\}$ の漸化式をつくる段階まで気がつきませんでした。

© 電送数学舎 2005

3

問題のページへ



線分 OA を直径とする円は，中心(1，0)から，

$$(x-1)^2+y^2=1$$

T$(1+\cos\theta,\ \sin\theta)$とすると，T における接線は，

$$(1+\cos\theta-1)(x-1)+y\sin\theta=1$$

$$x\cos\theta+y\sin\theta-\cos\theta-1=0$$

すると，$\mathrm{OP}=\dfrac{|-\cos\theta-1|}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}=\cos\theta+1$

これから，P$(x,\ y)$とおくと，

$$x=(\cos\theta+1)\cos\theta\ ,\ \ y=(\cos\theta+1)\sin\theta$$

$0\leqq\theta\leqq 2\pi$ のとき，点 P が描く曲線の長さを l とおくと，

$$\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta\cos\theta-(\cos\theta+1)\sin\theta=-\sin 2\theta-\sin\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta}=-\sin^2\theta+(\cos\theta+1)\cos\theta=\cos 2\theta+\cos\theta$$

よって，$l=\displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{(-\sin 2\theta-\sin\theta)^2+(\cos 2\theta+\cos\theta)^2}\,d\theta$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{1+1+2(\sin 2\theta\sin\theta+\cos 2\theta\cos\theta)}\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1+\cos\theta)}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta=2\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta$$

$$=4\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta=8\Big[\sin\frac{\theta}{2}\Big]_0^{\pi}=8$$

[解 説]

有名曲線であるカージオイドの長さを求める頻出問題です。

© 電送数学舎 2005

4

問題のページへ

(1)　$w=0$ より，$z^2+\dfrac{1}{z}=0$，$z^3+1=0$ となり，

$$(z+1)(z^2-z+1)=0$$

よって，$z=-1,\ \dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ から，$\theta=\arg z=-\pi,\ \pm\dfrac{\pi}{3}$

(2)　$z=\cos\theta+i\sin\theta$ とおくと，

$$w=z^2+\frac{1}{z}=\cos2\theta+i\sin2\theta+\cos\theta-i\sin\theta$$

$$=2\cos\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+2i\cos\frac{3\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}=2\cos\frac{3\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

ここで，$-\pi\leqq\theta<\pi$ より，$-\dfrac{3}{2}\pi\leqq\dfrac{3}{2}\theta<\dfrac{3}{2}\pi$ であり，また，$w\neq0$ から，(1)より $\theta\neq-\pi$，$\theta\neq\pm\dfrac{\pi}{3}$，すなわち $\dfrac{3}{2}\theta\neq-\dfrac{3}{2}\pi$，$\dfrac{3}{2}\theta\neq\pm\dfrac{\pi}{2}$ となる。

(i)　$-\dfrac{3}{2}\pi<\dfrac{3}{2}\theta<-\dfrac{\pi}{2}\ \left(-\pi<\theta<-\dfrac{\pi}{3}\right)$ のとき

このとき，$2\cos\dfrac{3\theta}{2}<0$ となるので，

$$w=-2\cos\frac{3\theta}{2}\left(-\cos\frac{\theta}{2}-i\sin\frac{\theta}{2}\right)=-2\cos\frac{3\theta}{2}\left\{\cos\left(\pi+\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\theta}{2}\right)\right\}$$

すると，$\dfrac{\pi}{2}<\pi+\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{5}{6}\pi$ から，$\beta=\arg w=\pi+\dfrac{\theta}{2}$

(ii)　$-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{3}{2}\theta<\dfrac{\pi}{2}\ \left(-\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{\pi}{3}\right)$ のとき

このとき，$2\cos\dfrac{3\theta}{2}>0$ であり，$-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{6}$ から，$\beta=\arg w=\dfrac{\theta}{2}$

(iii)　$\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{3}{2}\theta<\dfrac{3}{2}\pi\ \left(\dfrac{\pi}{3}<\theta<\pi\right)$ のとき

このとき，$2\cos\dfrac{3\theta}{2}<0$ となるので，

$$w=-2\cos\frac{3\theta}{2}\left(-\cos\frac{\theta}{2}-i\sin\frac{\theta}{2}\right)=-2\cos\frac{3\theta}{2}\left\{\cos\left(-\pi+\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(-\pi+\frac{\theta}{2}\right)\right\}$$

すると，$-\dfrac{5}{6}\pi<-\pi+\dfrac{\theta}{2}<-\dfrac{\pi}{2}$ から，$\beta=\arg w=-\pi+\dfrac{\theta}{2}$

(3)　△OXY の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{OX}\cdot\mathrm{OY}\,|\sin(\beta-\theta)|=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\left|2\cos\frac{3}{2}\theta\right||\sin(\beta-\theta)|$$

(i)　$-\pi<\theta<-\dfrac{\pi}{3}$ のとき

$$S=\left|\cos\frac{3}{2}\theta\right|\left|\sin\left(\pi-\frac{\theta}{2}\right)\right|=\left|\cos\frac{3}{2}\theta\sin\frac{\theta}{2}\right|$$

(ii)　$-\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{\pi}{3}$ のとき

$$S=\left|\cos\frac{3}{2}\theta\right|\left|\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right)\right|=\left|\cos\frac{3}{2}\theta\sin\frac{\theta}{2}\right|$$

© 電送数学舎 2005

(iii) $\dfrac{\pi}{3}<\theta<\pi$ のとき

$$S=\left|\cos\frac{3}{2}\theta\right|\left|\sin\left(-\pi-\frac{\theta}{2}\right)\right|=\left|\cos\frac{3}{2}\theta\sin\frac{\theta}{2}\right|$$

(i)〜(iii)より，$S=\left|\cos\dfrac{3}{2}\theta\sin\dfrac{\theta}{2}\right|=\dfrac{1}{2}\left|\sin 2\theta-\sin\theta\right|$

すると，条件より，$\dfrac{1}{2}\left|\sin 2\theta-\sin\theta\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となり，

$$\sin 2\theta-\sin\theta=\pm\sqrt{3}\ ,\ \ 2\sin\theta\cos\theta-\sin\theta=\pm\sqrt{3}\ \cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$x=\cos\theta$ ，$y=\sin\theta$ とおくと，

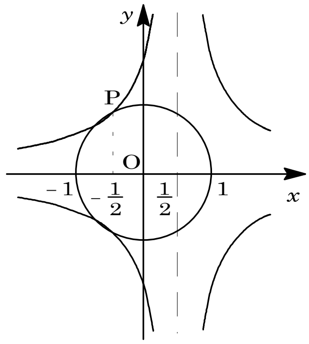
$$x^2+y^2=1\ \cdots\cdots\cdots②,\ \ 2xy-y=\pm\sqrt{3}\ \cdots\cdots\cdots③$$

$-\pi\leqq\theta<\pi$ より，①の解の個数は，②かつ③の解の個数と一致する。

さて，③より，$(2x-1)y=\pm\sqrt{3}$

$x=\dfrac{1}{2}$ とすると成立しないので，$x\neq\dfrac{1}{2}$ から，

$$y=\frac{\sqrt{3}}{2x-1}\ \cdots\cdots\cdots④,\ \ y=\frac{-\sqrt{3}}{2x-1}\ \cdots\cdots\cdots⑤$$



ここで，円②と曲線⑤は，$x=-\dfrac{1}{2}$ のとき共有点をもち，この点を $\mathrm{P}\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ とおく。

②より，$2x+2y\dfrac{dy}{dx}=0$ ，$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$ となり，点 P において $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である。

⑤より，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2\sqrt{3}}{(2x-1)^2}$ となり，点 P において $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である。

すると，$\dfrac{1}{\sqrt{3}}<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より，円②と曲線⑤は 2 個の共有点をもつ。さらに，曲線④と曲線⑤は x 軸に関して対称なので，円②と曲線④も 2 個の共有点をもち，円②と曲線③は，合わせて 4 個の共有点をもつ。

よって，①の解は 4 個となり，△OXY の面積が $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となる θ は 4 個存在する。

[解 説]

(2)から複雑さが増してきます。(3)の解の個数を求めるのに，関数設定をして増減を調べるというオーソドックスな方法では，多量の計算が必要となります。考え直して，図形的に解いてみました。押さえ込んだ印象のする解き方ですが。

© 電送数学舎 2005