1

問題のページへ

(1) 加法定理を用いると,

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}},\quad \sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

これより, $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3}+1 & -(\sqrt{3}-1) \\ \sqrt{3}-1 & \sqrt{3}+1 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \cos 15^\circ & -\sin 15^\circ \\ \sin 15^\circ & \cos 15^\circ \end{pmatrix}$

よって, $A^2 = (\sqrt{2})^2\begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

$$A^3 = (\sqrt{2})^3\begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^6 = (\sqrt{2})^6\begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) A^n が単位行列の実数倍となるのは, $\frac{180^\circ}{15^\circ} = 12$ から, n が 12 の倍数のときであり, $n \geqq 2$ のとき, その最小値は $n = 12$ となる。

$$A^{12} = (\sqrt{2})^{12}\begin{pmatrix} \cos 180^\circ & -\sin 180^\circ \\ \sin 180^\circ & \cos 180^\circ \end{pmatrix} = 64\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -64\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

両辺に A をかけると, $A^{13} = -64A$

よって, $A^n = xA$ を満たす最小の整数 n は 13 で, このとき $x = -64$ である。

(3) $A^{24} = (\sqrt{2})^{24}\begin{pmatrix} \cos 360^\circ & -\sin 360^\circ \\ \sin 360^\circ & \cos 360^\circ \end{pmatrix} = 2^{12}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ より,

$$A^{120} = (A^{24})^5 = 2^{60}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{60} & 0 \\ 0 & 2^{60} \end{pmatrix}$$

[解 説]

A が回転行列であるという知識を前提として, 解をつくりました。これを用いない場合は, 計算力がものを言います。

2

問題のページへ

(1)　$a_{n+1}(a_n+1)=1$から，$a_n+1\neq 0$なので，$a_{n+1}=\dfrac{1}{a_n+1}$ ………①

すると，$a_{n+1}{}^2+a_{n+1}-1=\dfrac{1}{(a_n+1)^2}+\dfrac{1}{a_n+1}-1=\dfrac{1+(a_n+1)-(a_n+1)^2}{(a_n+1)^2}$

$$=\frac{1-a_n-a_n{}^2}{(a_n+1)^2}=-\frac{a_n{}^2+a_n-1}{(a_n+1)^2}$$

(2)　$b_n=a_n{}^2+a_n-1$とおくと, (1)より，$b_{n+1}=-\dfrac{b_n}{(a_n+1)^2}$ ………②

ここで，$b_{2n-1}>0$であることを，数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=1$のとき　$b_1=a_1{}^2+a_1-1=1>0$

(ii)　$n=k$のとき　$b_{2k-1}>0$と仮定する。

②より，$b_{2k}=-\dfrac{b_{2k-1}}{(a_{2k-1}+1)^2}<0$，$b_{2k+1}=-\dfrac{b_{2k}}{(a_{2k}+1)^2}>0$

よって，$n=k+1$のときも成立する。

(i)(ii)より，$b_{2n-1}>0$である。

さらに，②から，$b_{2n}=-\dfrac{b_{2n-1}}{(a_{2n-1}+1)^2}<0$となる。

(3)　(2)より，$b_{2n-1}=a_{2n-1}{}^2+a_{2n-1}-1>0$

①より，帰納的に$a_n>0$なので，$a_{2n-1}>0$から，$a_{2n-1}>\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

また，$b_{2n}=a_{2n}{}^2+a_{2n}-1<0$で，$a_{2n}>0$から，$0<a_{2n}<\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

以上より，$a_{2n}<\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}<a_{2n-1}$

[解 説]

誘導が細かく付いていますので, (3)の結論がスムーズに導けます。

3

問題のページへ

実数係数の 3 次方程式$x^3+px^2+qx+r=0$は虚数解をもつので，αを実数，βを虚数として，その解をα，β，$\overline{\beta}$とおくことができる。解と係数の関係より，

$$\alpha+\beta+\overline{\beta}=-p\cdots\cdots\cdots①,\ \alpha\beta+\beta\overline{\beta}+\alpha\overline{\beta}=q\cdots\cdots\cdots②,\ \alpha\beta\overline{\beta}=-r\cdots\cdots\cdots③$$

また，$|\beta|=1$から$\beta\overline{\beta}=1$なので，②，③より，

$$\alpha(\beta+\overline{\beta})=q-1\cdots\cdots\cdots②',\ \alpha=-r\cdots\cdots\cdots③'$$

③′を①，②′に代入して，$\beta+\overline{\beta}=r-p\cdots\cdots\cdots$④，$-r(\beta+\overline{\beta})=q-1\cdots\cdots\cdots$⑤

④⑤より，$-r(r-p)=q-1\cdots\cdots\cdots$⑥

ここで，条件から$|p|=|q|=|r|$であるので，$p=\pm r$となる。

(i)　$p=r$のとき　⑥より$q=1$

このとき，$|p|=|r|=1$から，$(p,\ r)=(1,\ 1),\ (-1,\ -1)$となる。

$(p,\ q,\ r)=(1,\ 1,\ 1)$のとき

$x^3+x^2+x+1=0$，$(x+1)(x^2+1)=0$，$x=-1,\ \pm i$より適する。

$(p,\ q,\ r)=(-1,\ 1,\ -1)$のとき

$x^3-x^2+x-1=0$，$(x-1)(x^2+1)=0$，$x=1,\ \pm i$より適する。

(ii)　$p=-r$のとき　⑥より$-2r^2=q-1$

(ii-i)　$q=r$のとき　$-2r^2=r-1$，$2r^2+r-1=0$，$r=\dfrac{1}{2},\ -1$

$(p,\ q,\ r)=\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$のとき

$x^3-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}=0$，$\left(x+\dfrac{1}{2}\right)(x^2-x+1)=0$，$x=-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$より適する。

$(p,\ q,\ r)=(1,\ -1,\ -1)$のとき

$x^3+x^2-x-1=0$，$(x+1)^2(x-1)=0$，$x=\pm1$より適さない。

(ii-ii)　$q=-r$のとき　$-2r^2=-r-1$，$2r^2-r-1=0$，$r=-\dfrac{1}{2},\ 1$

$(p,\ q,\ r)=\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$のとき

$x^3+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}=0$，$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)(x^2+x+1)=0$，$x=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$より適する。

$(p,\ q,\ r)=(-1,\ -1,\ 1)$のとき

$x^3-x^2-x+1=0$，$(x-1)^2(x+1)=0$，$x=\pm1$より適さない。

(i)(ii)より，$(p,\ q,\ r)=(1,\ 1,\ 1),\ (-1,\ 1,\ -1),\ \left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right),\ \left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$

[解 説]

必要条件から$(p,\ q,\ r)$の候補を絞り込み，その後，十分性を確認しました。

4

問題のページへ

(1)　PH : PA $= k : 1$ より，PH $= k$PA となり, S の方程式は,

$$|x| = k\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}\,,\ \ x^2 = k^2\{(x-1)^2+y^2+z^2\}\cdots\cdots\cdots(*)$$

点 P と x 軸との距離を d とすると，$d=\sqrt{y^2+z^2}$ なので, $(*)$より,

$$d^2 = \frac{x^2}{k^2}-(x-1)^2 = -\frac{k^2-1}{k^2}x^2+2x-1 = -\frac{k^2-1}{k^2}\Big(x-\frac{k^2}{k^2-1}\Big)^2+\frac{1}{k^2-1}$$

$k>1$ より $-\dfrac{k^2-1}{k^2}<0$ となり，$x=\dfrac{k^2}{k^2-1}$ のとき d^2 は最大となる。このとき，d は最大値 $\sqrt{\dfrac{1}{k^2-1}}=\dfrac{1}{\sqrt{k^2-1}}$ をとる。

(2)　$(*)$に $z=0$ を代入すると，$x^2=k^2\{(x-1)^2+y^2\}$，$y^2=\dfrac{x^2}{k^2}-(x-1)^2$

$y\geqq 0$ より $y=\sqrt{\dfrac{x^2}{k^2}-(x-1)^2}$ となり, C の方程式は,

$$y=\sqrt{\frac{x^2}{k^2}-(x-1)^2}\,,\ \ z=0$$

さて，C を x 軸のまわりに回転してできる図形を，x 軸の垂直な平面 $x=t$ で切断したとき，その切り口は半径が $\sqrt{\dfrac{t^2}{k^2}-(t-1)^2}$ の円になり,

$$y^2+z^2=\frac{t^2}{k^2}-(t-1)^2,\ \ x=t$$

t は任意なので，この図形は方程式 $y^2+z^2=\dfrac{x^2}{k^2}-(x-1)^2$ で表され，これは$(*)$と一致する。すなわち図形 S である。

(3)　切り口が存在する t の範囲は，$\dfrac{t^2}{k^2}-(t-1)^2\geqq 0$，$(k^2-1)t^2-2k^2t+k^2\leqq 0$

$$\{(k+1)t-k\}\{(k-1)t-k\}\leqq 0\,,\ \ \frac{k}{k+1}\leqq t\leqq\frac{k}{k-1}$$

S で囲まれる立体の体積を V とすると,

$$V=\pi\int_{\frac{k}{k+1}}^{\frac{k}{k-1}}\Big\{\frac{t^2}{k^2}-(t-1)^2\Big\}dt=-\frac{k^2-1}{k^2}\pi\int_{\frac{k}{k+1}}^{\frac{k}{k-1}}\Big(t-\frac{k}{k+1}\Big)\Big(t-\frac{k}{k-1}\Big)dt$$

$$=-\frac{k^2-1}{k^2}\pi\cdot\Big(-\frac{1}{6}\Big)\Big(\frac{k}{k-1}-\frac{k}{k+1}\Big)^3=\frac{k^2-1}{6k^2}\pi\cdot\frac{8k^3}{(k^2-1)^3}=\frac{4\pi k}{3(k^2-1)^2}$$

[解 説]

S で囲まれる立体を x 軸に垂直な平面で切断すると，その断面は円になります。この点を問う(2)は, (3)への誘導となっています。