

1

問題のページへ

(1)  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$  に対して,  $f(1) = r$ ,  $f(-1) = s$ ,  $f(-2) = t$  より,

$$a + b + c = r \dots\dots, \quad -a + b - c = s \dots\dots, \quad -8a + 4b - 2c = t \dots\dots$$

$$\text{より, } 2b = r + s, \quad b = \frac{r+s}{2} \dots\dots\dots$$

より  $-6a + 6b = 2r + t$  となり, を代入して,

$$6a = 6 \cdot \frac{r+s}{2} - 2r - t = r + 3s - t, \quad a = \frac{r+3s-t}{6} \dots\dots\dots$$

$$\text{に } \text{を代入すると, } c = r - \frac{r+3s-t}{6} - \frac{r+s}{2} = \frac{2r-6s+t}{6}$$

(2) (1)より,  $f(n) = \frac{r+3s-t}{6}n^3 + \frac{r+s}{2}n^2 + \frac{2r-6s+t}{6}n$

$$= \frac{r}{6}(n^3 + 3n^2 + 2n) + \frac{s}{2}(n^3 + n^2 - 2n) - \frac{t}{6}(n^3 - n)$$

$$= \frac{r}{6}n(n+1)(n+2) + \frac{s}{2}(n-1)n(n+2) - \frac{t}{6}(n-1)n(n+1)$$

ここで,  $n(n+1)(n+2)$  および  $(n-1)n(n+1)$  は連続 3 整数の積なので 6 の倍数となる。また,  $(n-1)n$  は連続 2 整数の積なので 2 の倍数である。

よって, すべての整数  $n$  について,  $f(n)$  は整数になる。

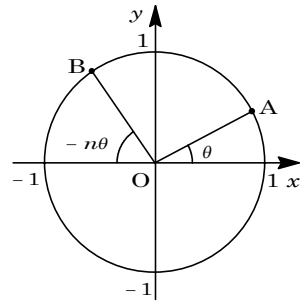
### [ 解 説 ]

(1)の誘導に従うと, (2)の結論までストレートに進むことができます。整数を題材にした頻出問題の 1 つです。

2

問題のページへ

- (1) A と B が 1 回目に出会う条件は  $\theta = \pi - n\theta$ , 2 回目に出会う条件は  $\theta = \pi - n\theta + 2\pi$  であり, 同様に考えると,  $k$  回目に出会う条件は  $\theta = \pi - n\theta + 2(k-1)\pi$ , すなわち  $2(k-1)\pi = (n+1)\theta - \pi \dots\dots$  である。



ここで,  $0 < \theta < 2\pi$  より,

$$-\pi < (n+1)\theta - \pi < (2n+1)\pi$$

$$\text{から, } -\pi < 2(k-1)\pi < (2n+1)\pi, \frac{1}{2} < k < n + \frac{3}{2}$$

よって,  $k = 1, 2, \dots, n+1$  より, A と B は  $n+1$  回出会う。

- (2) A と B が点  $(0, 1)$  で出会うとき,  $\theta = \frac{\pi}{2}$  なので,  $n$  より,

$$2(k-1)\pi = (n+1)\frac{\pi}{2} - \pi, \quad n = 4(k-1) + 1$$

よって,  $n \geq 2$  から,  $n$  は 4 で割って 1 余る 5 以上の整数である。

- (3)  $0 < \theta < 2\pi$  として,  $A(\cos\theta, \sin\theta)$ ,  $B(\cos(\pi - 7\theta), \sin(\pi - 7\theta))$  とおくことができ, 条件より,  $\cos\theta < \cos(\pi - 7\theta)$  である。

$$\cos\theta < -\cos 7\theta, \quad \cos 7\theta + \cos\theta < 0, \quad 2\cos 4\theta \cos 3\theta < 0 \dots\dots\dots$$

$$\text{ここで, } \cos 4\theta = 0 \text{ の解は, } \theta = \frac{1}{8}\pi, \frac{3}{8}\pi, \frac{5}{8}\pi, \frac{7}{8}\pi, \frac{9}{8}\pi, \frac{11}{8}\pi, \frac{13}{8}\pi, \frac{15}{8}\pi,$$

$$\cos 3\theta = 0 \text{ の解は, } \theta = \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{11}{6}\pi \text{ である。}$$

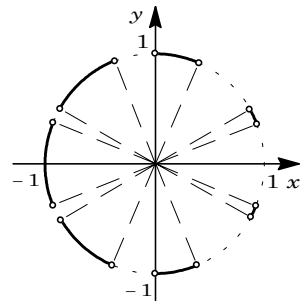
さて,  $\theta = 2\pi$  は を満たさないことから, 不等式 の解は,

$$\frac{1}{8}\pi < \theta < \frac{1}{6}\pi, \quad \frac{3}{8}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi, \quad \frac{5}{8}\pi < \theta < \frac{5}{6}\pi$$

$$\frac{7}{8}\pi < \theta < \frac{9}{8}\pi, \quad \frac{7}{6}\pi < \theta < \frac{11}{8}\pi, \quad \frac{3}{2}\pi < \theta < \frac{13}{8}\pi$$

$$\frac{11}{6}\pi < \theta < \frac{15}{8}\pi$$

以上より, 求める点 A の範囲を図示すると, 右図の実線部となる。



[ 解 説 ]

(3)は不等式 を解き図示するだけですが, たいへん時間がかかりました。最初は度数法で計算していましたが, あまりにも繁雑すぎるため, 弧度法に切り換えました。

3

問題のページへ

- (1) 点 F, H, J を表す複素数をそれぞれ
- $z_1, z_2, z_3$
- とおく。

条件より, A を中心として B を  $-90^\circ$  回転すると F に一致するので,

$$z_1 - \alpha = -i(\beta - \alpha), \quad z_1 = (1+i)\alpha - i\beta$$

同様に, B を中心として C を  $-90^\circ$  回転すると H に一致し, C を中心として A を  $-90^\circ$  回転すると J に一致するので,

$$z_2 - \beta = -i(\gamma - \beta), \quad z_2 = (1+i)\beta - i\gamma$$

$$z_3 - \gamma = -i(\alpha - \gamma), \quad z_3 = (1+i)\gamma - i\alpha$$

- (2) 点 P, Q, R を表す複素数をそれぞれ
- $w_1, w_2, w_3$
- とおく。

$$\text{まず, 2点 B, F の中点が P より, } w_1 = \frac{\beta + z_1}{2} = \frac{(1+i)\alpha + (1-i)\beta}{2}$$

$$\text{2点 C, H の中点が Q より, } w_2 = \frac{\gamma + z_2}{2} = \frac{(1+i)\beta + (1-i)\gamma}{2}$$

$$\text{2点 A, J の中点が R より, } w_3 = \frac{\alpha + z_3}{2} = \frac{(1+i)\gamma + (1-i)\alpha}{2}$$

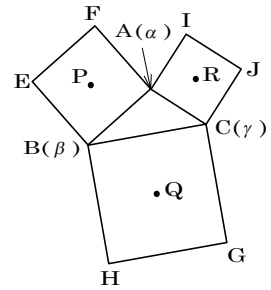
$$\text{ここで, } w_2 - \alpha = \frac{-2\alpha + (1+i)\beta + (1-i)\gamma}{2}$$

$$w_3 - w_1 = \frac{-2i\alpha - (1-i)\beta + (1+i)\gamma}{2} = \frac{-2i\alpha + i(1+i)\beta + i(1-i)\gamma}{2}$$

すると,  $w_3 - w_1 = i(w_2 - \alpha)$  となるので,  $\frac{w_3 - w_1}{w_2 - \alpha} = i$  から,

$$\frac{|w_3 - w_1|}{|w_2 - \alpha|} = 1, \quad \arg \frac{w_3 - w_1}{w_2 - \alpha} = 90^\circ$$

したがって,  $AQ = PR$ ,  $AQ \perp PR$  である。



## [ 解説 ]

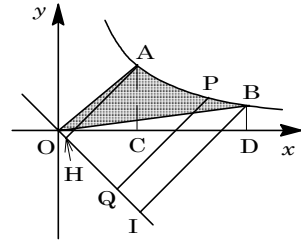
複素数の特徴を活かすことのできる証明問題です。有名な問題なので, 参考書などには類題が載っています。

4

問題のページへ

(1)  $C(a, 0)$ ,  $D(b, 0)$  とおくと,

$$\begin{aligned} E &= \text{OAC} + \int_a^b \frac{1}{x} dx - \text{OBD} \\ &= \frac{1}{2} a \cdot \frac{1}{a} + [\log x]_a^b - \frac{1}{2} b \cdot \frac{1}{b} \\ &= \log b - \log a = \log \frac{b}{a} \end{aligned}$$



(2) 点  $P(c, \frac{1}{c})$  と直線  $x + y = 0$  との距離が  $t$  なので,

$$t = \frac{|c + \frac{1}{c}|}{\sqrt{1^2 + 1^2}}, \quad \sqrt{2}t = c + \frac{1}{c} \dots\dots\dots$$

また,  $OP = \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2}}$  から, 三平方の定理より,  $s^2 + t^2 = c^2 + \frac{1}{c^2} \dots\dots\dots$

より,  $s^2 + t^2 = (c + \frac{1}{c})^2 - 2$

を代入して,  $s^2 + t^2 = 2t^2 - 2$ ,  $t^2 = s^2 + 2 \dots\dots\dots$

(3) 点  $A, B$  から直線  $y = -x$  に下ろした垂線の足をそれぞれ  $H, I$  とすると, より

$AH = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + \frac{1}{a})$  となるので, から  $s^2 = t^2 - 2$  として,

$$OH^2 = AH^2 - 2 = \frac{1}{2}(a + \frac{1}{a})^2 - 2 = \frac{1}{2}(a^2 - 2 + \frac{1}{a^2}) = \frac{1}{2}(a - \frac{1}{a})^2$$

$a > 1$  より,  $OH = \frac{1}{\sqrt{2}}(a - \frac{1}{a})$

同様にして,  $BI = \frac{1}{\sqrt{2}}(b + \frac{1}{b})$ ,  $OI = \frac{1}{\sqrt{2}}(b - \frac{1}{b})$

そこで,  $OH = \frac{1}{\sqrt{2}}(a - \frac{1}{a}) = \alpha$ ,  $OI = \frac{1}{\sqrt{2}}(b - \frac{1}{b}) = \beta$  とおき, を用いると,

$AH^2 = \alpha^2 + 2$ ,  $BI^2 = \beta^2 + 2$  となるので,

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi AH^2 \cdot OH + \int_a^\beta \pi t^2 ds - \frac{1}{3}\pi BI^2 \cdot OI \\ &= \frac{1}{3}\pi(\alpha^2 + 2)\alpha + \int_a^\beta \pi(s^2 + 2) ds - \frac{1}{3}\pi(\beta^2 + 2)\beta \\ &= \frac{1}{3}\pi(\alpha^3 + 2\alpha) + \pi\left[\frac{1}{3}s^3 + 2s\right]_a^\beta - \frac{1}{3}\pi(\beta^3 + 2\beta) \\ &= \frac{1}{3}\pi(\alpha^3 + 2\alpha) + \frac{1}{3}\pi(\beta^3 - \alpha^3) + 2\pi(\beta - \alpha) - \frac{1}{3}\pi(\beta^3 + 2\beta) \\ &= \frac{2}{3}\pi\alpha + 2\pi\beta - 2\pi\alpha - \frac{2}{3}\pi\beta = \frac{4}{3}\pi(\beta - \alpha) \\ &= \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\left(b - \frac{1}{b} - a + \frac{1}{a}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi\left(b - a - \frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right) \end{aligned}$$

(4)  $b = a + 1$  のとき,  $E = \log \frac{a+1}{a} = \log \left( a + \frac{1}{a} \right)$  より,

$$\lim_{a \rightarrow \infty} E = \lim_{a \rightarrow \infty} \log \left( a + \frac{1}{a} \right) = 0$$

また,  $V = \frac{2\sqrt{2}}{3} \pi \left( a + 1 - a - \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a} \right) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \pi \left( 1 - \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a} \right)$  より,

$$\lim_{a \rightarrow \infty} V = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{2}}{3} \pi \left( 1 - \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a} \right) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \pi$$

[ 解 説 ]

例年, どこかの大学で出題されている斜回転体の体積を求める問題です。誘導が非常に細かくつけられています。