1

問題のページへ

(1)　$\mathrm{P}_n(z_n)$ とし，$\alpha = r(\cos 60° + i\sin 60°)$ とおくと，条件より，

$$z_{n+2} - z_{n+1} = \alpha(z_{n+1} - z_n)\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$w_n = z_{n+1} - z_n$ とおくと，①より，$w_{n+1} = \alpha w_n$

$$w_n = w_0\alpha^n = (z_1 - z_0)\alpha^n = \alpha^n$$

よって，$z_{n+1} - z_n = \alpha^n\cdots\cdots\cdots②$

すると，$z_3 - z_2 = \alpha^2$，$z_2 - z_1 = \alpha$，$z_1 - z_0 = 1$ より，

$$z_3 = z_0 + (\alpha^2 + \alpha + 1) = r^2(\cos 120° + i\sin 120°) + r(\cos 60° + i\sin 60°) + 1$$

$$= -\frac{1}{2}r^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}r^2 i + \frac{1}{2}r + \frac{\sqrt{3}}{2}ri + 1 = 1 + \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}r^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}(r + r^2)i$$

(2)　②より，$z_n = z_0 + \sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k = \dfrac{1-\alpha^n}{1-\alpha}\ (n \geqq 1)$ となるので，

$$z_{6n} = \frac{1-\alpha^{6n}}{1-\alpha} = \frac{1 - r^{6n}\{\cos(60°\times 6n) + i\sin(60°\times 6n)\}}{1 - r(\cos 60° + i\sin 60°)}$$

$$= \frac{1-r^{6n}}{1 - \frac{1}{2}r - \frac{\sqrt{3}}{2}ri} = \frac{(1-r^{6n})\left(1 - \frac{1}{2}r + \frac{\sqrt{3}}{2}ri\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}r\right)^2 + \frac{3}{4}r^2} = \frac{(1-r^{6n})(2 - r + \sqrt{3}ri)}{2(1 - r + r^2)}$$

$z_n = a + bi$ より，$a = \dfrac{(2-r)(1-r^{6n})}{2(1-r+r^2)}$，$b = \dfrac{\sqrt{3}r(1-r^{6n})}{2(1-r+r^2)}$

[解 説]

複素数平面上での点の回転を題材にした超頻出問題です。

2

問題のページへ

(1)　$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$のとき，$A^2=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$

条件より，$A^2=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$なので，

$a^2+bc=-1$……①，$b(a+d)=0$……②

$c(a+d)=0$……③，$bc+d^2=-2$……④

①－④より，$a^2-d^2=1$，$(a+d)(a-d)=1$………⑤

⑤より，$a+d\neq 0$なので，②より$b=0$，③より$c=0$

このとき，①は$a^2=-1$となり，これを満たす実数aは存在しない。

したがって，$A^2=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$を満たす$A$は存在しない。

(2)　条件より，$A^2=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$なので，

$a^2+bc=-1$……⑥，$b(a+d)=0$……⑦

$c(a+d)=0$……⑧，$bc+d^2=-1$……⑨

(i)　$a+d\neq 0$のとき

⑦より$b=0$，⑧より$c=0$

このとき，⑥は$a^2=-1$となり，成立しない。

(ii)　$a+d=0$のとき

$d=-a$より，⑥と⑨は一致する。また，⑦と⑧は成立する。

ここで$b=0$とすると，⑥は$a^2=-1$となり，成立しない。

よって，$b\neq 0$なので，⑥より$c=\dfrac{-a^2-1}{b}$

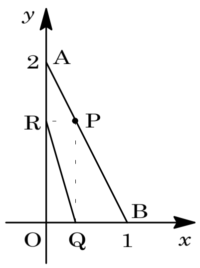
以上まとめて，$A=\begin{pmatrix} a & b \\ -\dfrac{a^2+1}{b} & -a \end{pmatrix}$

[解　説]

行列の成分についての連立方程式を解きます。明解に解くには，経験が必要です。

3

問題のページへ



直線ABの方程式は，$y=-2x+2$ より，$\mathrm{P}(t,\ -2t+2)$ とおく。ただし，$0\leqq t\leqq 1$ である。このとき，$\mathrm{Q}(t,\ 0)$，$\mathrm{R}(0,\ -2t+2)$ となる。

さて，$\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=(t,\ 2t-2)$ より，直線 RQ は法線ベクトルを $(2t-2,\ -t)$ とすることができ，その方程式は，

$$(2t-2)(x-t)-ty=0\cdots\cdots\cdots①$$

$0\leqq t\leqq 1$ のとき，①が通過する領域は，①を t に関する方程式としてみたとき，$0\leqq t\leqq 1$ に少なくとも 1 つの実数解をもつ $(x,\ y)$ の条件として求められる。

①より，$2t^2-(2x-y+2)t+2x=0\cdots\cdots\cdots②$

②の左辺を $f(t)$ とおくと，$f(0)=2x$，$f(1)=2-2x+y-2+2x=y$

ここで，線分QRの通過領域は△OABの内部または周上なので，

$$x\geqq 0,\ \ y\geqq 0,\ \ y\leqq -2x+2\cdots\cdots\cdots③$$

よって，$f(0)\geqq 0$，$f(1)\geqq 0$ となる。

そこで，$f(t)=2\left(t-\dfrac{2x-y+2}{4}\right)^2-\dfrac{(2x-y+2)^2}{8}+2x$ から，求める条件は，

$$0\leqq\frac{2x-y+2}{4}\leqq 1\cdots\cdots④,\ \ -\frac{(2x-y+2)^2}{8}+2x\leqq 0\cdots\cdots⑤$$

④より，$0\leqq 2x-y+2\leqq 4$，$2x-2\leqq y\leqq 2x+2\cdots\cdots\cdots⑥$

⑤より，$(2x-y+2)^2-16x\geqq 0$，$(2x-y+2+4\sqrt{x})(2x-y+2-4\sqrt{x})\geqq 0$

⑥より $2x-y+2+4\sqrt{x}\geqq 0$ なので，$2x-y+2-4\sqrt{x}\geqq 0$

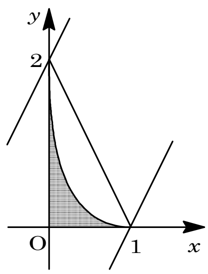
$$y\leqq 2x-4\sqrt{x}+2\cdots\cdots\cdots⑦$$

ここで，⑦の境界線 $y=2x-4\sqrt{x}+2$ に対して，

$$y'=2-4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{2(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}$$

$$y''=x^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{x\sqrt{x}}>0$$

x	0	$\cdots$	1
y'	×	−	0
y	2	↘	0



以上より，③⑥⑦を満たす領域は，右図の網点部になるので，この面積を S とすると，

$$S=\int_0^1(2x-4\sqrt{x}+2)\,dx=\left[x^2-4\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

[解 説]

直線の通過領域を求める頻出題です。実数解条件を用いて解いています。

4

問題のページへ

(1)　$f(x)=e^x-1-x$ とおくと，$f'(x)=e^x-1$

$x>0$ のとき，$f'(x)>0$ より，$f(x)>f(0)=0$

よって，$e^x>1+x$　$(x>0)$

(2)　$g(x)=\log(1+x)-1+e^{-x}$ とおくと，

$$g'(x)=\frac{1}{1+x}-e^{-x}=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{e^x}=\frac{e^x-(1+x)}{(1+x)e^x}$$

$x>0$ のとき, (1)より $g'(x)>0$ なので，$g(x)>g(0)=0$

よって，$\log(1+x)>1-e^{-x}$　$(x>0)$

(3)　条件より，$0\leqq x\leqq e^y-1$ ……①，$0\leqq y\leqq 1-e^{-x}$ ……②

①から，$e^y\geqq x+1$，$y\geqq\log(x+1)$ ………③

ここで, $x>0$ のとき, (2)より $\log(1+x)>1-e^{-x}$ ………④

③④より，$y>1-e^{-x}$ となるが，このとき②は成立しない。

よって，①より $x=0$ である。

すると，②は $0\leqq y\leqq 1-e^0=0$ となり，$y=0$ となる。

以上より，①②を満たすのは，$x=y=0$ だけである。

[解 説]

(3)では，まず①と②の領域を図示して，その共通部分が原点のみということを示しました。しかし，これでは(2)の誘導の意味が不明ですので，考え直したのが上の解です。