1

問題のページへ

(1)　$f(0)=1$より，$f(x)=ax^2+bx+1$とおくと，

$f(-1)=0$から，$a-b+1=0$………①

$f(n)=n$から，$an^2+bn+1=n$………②

①より$b=a+1$，②に代入して$an^2+(a+1)n+1=n$，$a(n^2+n)=-1$

$$a=-\frac{1}{n^2+n},\ b=-\frac{1}{n^2+n}+1=\frac{n^2+n-1}{n^2+n}$$

よって，$f(x)=-\dfrac{1}{n^2+n}x^2+\dfrac{n^2+n-1}{n^2+n}x+1$

(2)　(1)より，$f(k)=-\dfrac{1}{n^2+n}k^2+\dfrac{n^2+n-1}{n^2+n}k+1$なので，

$$S=\sum_{k=0}^{n}f(k)=-\frac{1}{n^2+n}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{n^2+n-1}{n^2+n}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n+1$$

$$=-\frac{1}{6}(2n+1)+\frac{1}{2}(n^2+n-1)+n+1=\frac{1}{6}(n+2)(3n+1)$$

(3)　$(n+2)(3n+1)=(n+2)(2n+n+1)=2n(n+2)+(n+1)(n+2)$と変形すると，$2n(n+2)$は偶数，さらに$n+1$，$n+2$のいずれかは偶数なので，$(n+1)(n+2)$も偶数となり，$(n+2)(3n+1)$は偶数となる。

また，$(n+2)(3n+1)$が 3 の倍数となる条件は，$3n+1$が 3 の倍数でないので，$n+2$が3の倍数となることである。

よって，Sの値が整数であるためには，$(n+2)(3n+1)$が 6 の倍数，すなわち$n+2$が3の倍数であることことが必要十分である。

[解 説]

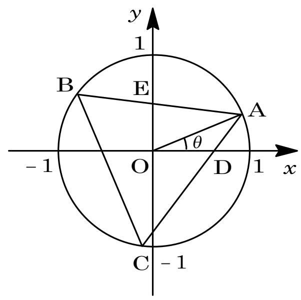
(2)の結果から，(3)では$(n+2)(3n+1)$が偶数になることをいえば，題意の証明ができます。nを偶奇で分けてもよいのですが，上の解では式変形をしてみました。

2

問題のページへ

正三角形 ABC に対して$A(\cos\theta,\ \sin\theta)$とおくと，対称性から$0\leqq\theta\leqq\dfrac{2}{3}\pi$の場合だけを考えても一般性を失わない。

(i)　$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$のとき



△OAD において，$\angle ADO=\pi-\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{5}{6}\pi-\theta$

$$\frac{OD}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)}$$

$$OD=\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)}=\frac{1}{\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta}$$

△OAE において，$\angle OEA=\pi-\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\dfrac{1}{3}\pi+\theta$ より，

$$\frac{OE}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{3}\pi+\theta\right)},\quad OE=\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\left(\frac{1}{3}\pi+\theta\right)}=\frac{1}{\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta}$$

△ABC の第 1 象限にある部分の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}OD\sin\theta+\frac{1}{2}OE\cos\theta=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta}$$

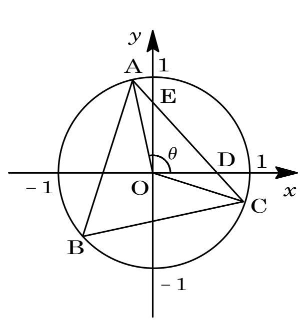
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta}{\sqrt{3}\sin^2\theta+4\sin\theta\cos\theta+\sqrt{3}\cos^2\theta}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}\sin2\theta+1}{2\sin2\theta+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4(2\sin2\theta+\sqrt{3})}$$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$なので，$0\leqq\sin2\theta\leqq1$ となる。

よって，$\sin2\theta=1$ のとき最大値$S=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2(2+\sqrt{3})}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$，$\sin2\theta=0$ のとき最小値$S=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$をとる。

(ii)　$\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{2}{3}\pi$のとき



△OCD において，$\angle ODC=\pi-\dfrac{\pi}{6}-\left(\dfrac{2}{3}\pi-\theta\right)=\dfrac{\pi}{6}+\theta$

$$\frac{OD}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)}$$

$$OD=\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)}=\frac{1}{\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta}$$

$\triangle$OAE において，$\angle \mathrm{OEA} = \pi - \dfrac{\pi}{6} - \left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{4}{3}\pi - \theta$ より，

$$\frac{\mathrm{OE}}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\sin\left(\frac{4}{3}\pi - \theta\right)},\quad \mathrm{OE} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\left(\frac{4}{3}\pi - \theta\right)} = \frac{1}{\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta}$$

$\triangle$ABC の第 1 象限にある部分の面積を S とすると，

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{OD}\cdot\mathrm{OE} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}(\sin^2\theta - \cos^2\theta) - 4\sin\theta\cos\theta} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sin 2\theta + \sqrt{3}\cos 2\theta}$$

$$= -\frac{1}{4\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right)}$$

$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{2}{3}\pi$ より $\dfrac{4}{3}\pi \leqq 2\theta + \dfrac{\pi}{3} \leqq \dfrac{5}{3}\pi$ なので，$-1 \leqq \sin\left(2\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) \leqq -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となる。

よって，$\sin\left(2\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき最大値 $S = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$，$\sin\left(2\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) = -1$ のとき最小値 $S = \dfrac{1}{4}$ をとる。

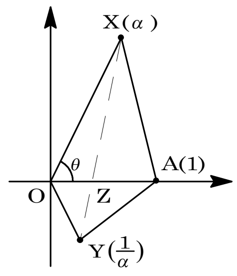
(i)(ii)より, S は最大値 $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$，最小値 $\dfrac{1}{4}$ をとる。

[解 説]

よくありそうな問題です。内容的には正弦定理の応用ですが，意外に奥が深いという感じがします。

3

問題のページへ



(1)　$\arg\alpha=\theta$ より，$\arg\dfrac{1}{\alpha}=\arg 1-\arg\alpha=-\theta$

よって，$\angle\mathrm{YOX}=\theta-(-\theta)=2\theta$

$$\angle\mathrm{XAY}=\arg\frac{\frac{1}{\alpha}-1}{\alpha-1}=\arg\frac{1-\alpha}{\alpha(\alpha-1)}=\arg\left(-\frac{1}{\alpha}\right)$$
$$=\arg(-1)-\arg\alpha=\pi-\theta$$

以上より，$\angle\mathrm{XAY}=\pi-\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{YOX}$，$\angle\mathrm{A}=\pi-\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{O}$

(2)　$t<0$ のとき $T(t)$ は明らかに△OXY の外部にあるので，以下，$t\geqq 0$ の場合を考える。

まず，線分 XY と実軸との交点を $Z(z)$ とすると，(1)より，実軸は∠XOY の二等分線なので，

$$\mathrm{XZ}:\mathrm{ZY}=\mathrm{OX}:\mathrm{OY}=|\alpha|:\left|\frac{1}{\alpha}\right|=|\alpha|^2:1$$

よって，$z=\dfrac{\alpha+|\alpha|^2\cdot\frac{1}{\alpha}}{|\alpha|^2+1}=\dfrac{\alpha+\alpha\overline{\alpha}\cdot\frac{1}{\alpha}}{|\alpha|^2+1}=\dfrac{\alpha+\overline{\alpha}}{|\alpha|^2+1}$

ここで，$\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおくと，$z=\dfrac{2r\cos\theta}{r^2+1}$ となる。

さて $0^\circ<\theta<90^\circ$ より，$0<z<\dfrac{2r}{r^2+1}=\dfrac{2}{r+\frac{1}{r}}$ であり，さらに $r>0$ から $r+\dfrac{1}{r}\geqq 2$

（等号は $r=1$ のとき）なので，$0<z<1$ である。

以上より，$T(t)$ が△OXY の外部にある条件は，$t<0$ または $t\geqq 1$ である。

[解 説]

(2)の問題文「α によらず」という部分は，内容が曖昧です。ここでは，複素数平面の第 1 象限において，任意の位置に α があると解釈しました。

4

問題のページへ

(1)　$f(t)=e^t$ のとき，$g(x)=\int_0^1 \left|e^t-x\right|dt$ となる。

(i)　$x<1$ のとき　$g(x)=\int_0^1 (e^t-x)\,dt=\left[e^t-xt\right]_0^1=-x+e-1$

このとき，関数 $g(x)$ は単調減少となる。

(ii)　$1\leqq x\leqq e$ のとき

$$g(x)=\int_0^{\log x}-(e^t-x)\,dt+\int_{\log x}^1 (e^t-x)\,dt=-\left[e^t-xt\right]_0^{\log x}+\left[e^t-xt\right]_{\log x}^1$$

$$=-(x-1)+x\log x+(e-x)-x(1-\log x)=2x\log x-3x+e+1$$

$g'(x)=2\log x+2x\cdot\dfrac{1}{x}-3=2\log x-1$ となり，関数 $g(x)$ の増減は右表のようになる。

x	1	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$	e
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$e-2$	$\searrow$		$\nearrow$	1

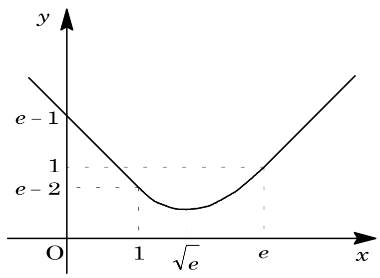
極小値は，$g(\sqrt{e})=e-2\sqrt{e}+1=(\sqrt{e}-1)^2$ である。

(iii) $x>e$ のとき

$$g(x)=\int_0^1-(e^t-x)\,dt=x-e+1$$

このとき，関数 $g(x)$ は単調増加となる。

(i)(ii)(iii)より，$y=g(x)$ のグラフの概形は右図のようになる。



(2)　条件より $a=f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，また $b=f(0)$，$c=f(1)$ とおく。すると，$f(t)$ は単調増加関数なので，$b<a<c$ となる。

さらに，$F'(t)=f(t)$ とおくと，

(i)　$x<b$ のとき　$g(x)=\int_0^1 \{f(t)-x\}\,dt=\left[F(t)-xt\right]_0^1=F(1)-F(0)-x$

このとき，関数 $g(x)$ は単調減少となる。

(ii)　$b\leqq x\leqq c$ のとき

$f(u)=x$，すなわち $u=f^{-1}(x)$ とおくと，

$$g(x)=\int_0^u-\{f(t)-x\}\,dt+\int_u^1 \{f(t)-x\}\,dt=-\left[F(t)-xt\right]_0^u+\left[F(t)-xt\right]_u^1$$

$$=-2F(u)+2xu-x+F(0)+F(1)$$

$$g'(x)=-2F'(u)\frac{du}{dx}+2u+2x\frac{du}{dx}-1=-2f(u)\frac{du}{dx}+2x\frac{du}{dx}+2u-1$$

$$=-2f(f^{-1}(x))\frac{du}{dx}+2x\frac{du}{dx}+2u-1=-2x\frac{du}{dx}+2x\frac{du}{dx}+2u-1$$

$$=2u-1=2f^{-1}(x)-1$$

条件より $a=f\left(\frac{1}{2}\right)$ なので，$f^{-1}(a)=\frac{1}{2}$ である。

さて，$f(t)$ が単調増加関数なので，$f^{-1}(x)$ も単調増加関数となり，$g'(x)=0$ すなわち $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}$ の解は $x=a$ となる。

さらに $g'(x)$ の符号は，$x=a$ の前後で負から正に変わる。

すると，関数 $g(x)$ の増減は右表のようになる。

x	b	$\cdots$	a	$\cdots$	c
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

(iii) $x>c$ のとき　$g(x)=\int_0^1 -\{f(t)-x\}dt=-F(1)+F(0)+x$

このとき，関数 $g(x)$ は単調増加となる。

(i)(ii)(iii)より，$g(x)$ はすべての x に対して連続なので，$x=a$ で最小値をとる。

[解　説]

(2)は(1)を一般化したもので，同じように論理を展開することができます。しかし，逆関数の扱い方など，かなり難易度はアップします。