1

問題のページへ

(1) $f(x)=(\log_2 2x)^2-5\log_2 x+3\log_x 2=(1+\log_2 x)^2-5\log_2 x+\dfrac{3}{\log_2 x}$

$=(\log_2 x)^2-3\log_2 x+1+\dfrac{3}{\log_2 x}$

ここで，$\log_2 x=t$ とおくと，方程式 $f(x)=2$ は，$t^2-3t+1+\dfrac{3}{t}=2$

$t^3-3t^2-t+3=0\ (t\neq 0)$，$(t-1)(t-3)(t+1)=0\ (t\neq 0)$

よって，$t=\pm1$，3 から，$\log_2 x=\pm1$，3 なので，

$x=2$，$\dfrac{1}{2}$，8

(2) (1)と同様にして，不等式 $f(x)\geqq 2$ は，$t^2-3t+1+\dfrac{3}{t}\geqq 2$

$t(t^3-3t^2-t+3)\geqq 0\ (t\neq 0)$，$t(t-1)(t-3)(t+1)\geqq 0\ (t\neq 0)$

よって，$t\leqq -1$，$0<t\leqq 1$，$3\leqq t$ から，$\log_2 x\leqq -1$，$0<\log_2 x\leqq 1$，$3\leqq \log_2 x$

$0<x\leqq \dfrac{1}{2}$，$1<x\leqq 2$，$8\leqq x$

[解 説]

(2)は分数不等式と 4 次不等式の解法を問う問題です。現行課程のカリキュラム上の弱点をついた設問となっています。

$\boxed{2}$ 問題のページへ

(1) $A^{-1}=\dfrac{1}{4-3}\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$が $x^2-3y^2=1$ ……①の整数解のとき，$a^2-3b^2=1$ ……②

$$\begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a-3b\\ -a+2b\end{pmatrix}$$

これより, a, b が整数のとき, c, d も整数であり，②から,

$$c^2-3d^2=(2a-3b)^2-3(-a+2b)^2=a^2-3b^2=1$$

よって，$\begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix}$ も①の整数解である。

(3) (2)から $c=2a-3b$，$d=-a+2b$ なので，②を用いると，

$$4a^2-9b^2=4a^2-3(a^2-1)=a^2+3>0$$

$a>0$, $b\geqq 0$ より, $2a>3b$ となり, $c>0$ である。

また，$b-d=b+a-2b=a-b$ から，②を用いると，

$$a^2-b^2=3b^2+1-b^2=2b^2+1>0$$

$a>0$, $b\geqq 0$ より, $a>b$ となり, $d<b$ である。

さらに, $d<0$ のとき $-a+2b<0$，$2b<a$ なので, $a>0$, $b\geqq 0$ より，②から,

$$a^2-(2b)^2=1+3b^2-4b^2=1-b^2>0$$

$-1<b<1$ となり, b は整数なので，$b=0$ である。

(4) $\begin{pmatrix}a_0\\ b_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}$ とおくと，$\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}=(A^{-1})^n\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$

ここで，$\begin{pmatrix}a_0\\ b_0\end{pmatrix}$ が①の整数解より, (2)から帰納的に $\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}$ も①の整数解となり,

$$a_n{}^2-3b_n{}^2=1 \text{ ………③}$$

(3)より，数列 $\{b_n\}$ は減少数列なので，$b_0>b_1>b_2>\cdots>b_n>b_{n+1}\cdots$ となり，また正の整数 b_0 より小さい自然数は有限個より，ある n に対して $b_{n+1}<0$ である。

このとき(3)より $b_n=0$，③より $a_n>0$ なので，$a_n=1$ となり,

$$\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=(A^{-1})^n\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

[解 説]

有名な難問がまた出題されました。記憶をたどって調べていくと, 93 年の広大・後期の数学科, 88 年の京大・理系で出ています。

3

問題のページへ

(1)　$\cos x = t$ とすると，$\cos 3x = 4t^3 - 3t$，$\cos 2t = 2t^2 - 1$ なので，

$$f(x) = \cos 3x + \cos 2x + \cos x = 4t^3 + 2t^2 - 2t - 1$$

(2)　$f(x) = 0$ より，$4t^3 + 2t^2 - 2t - 1 = 0$，$(2t+1)(2t^2-1) = 0$，$t = -\frac{1}{2}$，$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos x = -\frac{1}{2}$，$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ より，$x = \frac{\pi}{4}$，$\frac{2\pi}{3}$，$\frac{3\pi}{4}$

(3)　$f'(x) = -3\sin 3x - 2\sin 2x - \sin x$ より，

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\cdot 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2} - 2$$

$$f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -3\cdot 0 - 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\cdot(-1) - \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 - 2\sqrt{2}$$

(4)　(3)より $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$，$f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) > 0$，$f'\left(\frac{3\pi}{4}\right) < 0$ なので，$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}$，$\frac{2\pi}{3} \leqq x \leqq \frac{3\pi}{4}$ のとき $f(x) \geqq 0$，$\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{2\pi}{3}$，$\frac{3\pi}{4} \leqq x \leqq \pi$ のとき $f(x) \leqq 0$ となる。

$F(x)$ を $f(x)$ の不定積分の 1 つとすると，$F(x) = \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{2}\sin 2x + \sin x$

$$I = \int_0^{\pi} |f(x)|dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}} f(x)dx + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x)dx - \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} f(x)dx$$

$$= F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) - F\left(\frac{2\pi}{3}\right) + F\left(\frac{\pi}{4}\right) + F\left(\frac{3\pi}{4}\right) - F\left(\frac{2\pi}{3}\right) - F(\pi) + F\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= -F(0) + 2F\left(\frac{\pi}{4}\right) - 2F\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 2F\left(\frac{3\pi}{4}\right) - F(\pi)$$

ここで，$F(0) = 0$，$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\sqrt{2}$，$F\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$，$F\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\sqrt{2}$，$F(\pi) = 0$ より，

$$I = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\sqrt{2}\right) = \frac{8}{3}\sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

[解 説]

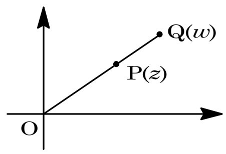
第 1 問と同じく，計算力主体の問題です。特に(4)は疲れます。

4

問題のページへ

(1)　半直線OP(z)上に点Q(w)があるので, $k>0$ として $w=kz$ より，$|w|=k|z|$

条件より，$|w|=\dfrac{2}{|z|}$ なので，$k|z|=\dfrac{2}{|z|}$，$k=\dfrac{2}{|z|^2}$

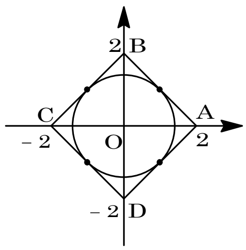


よって，$w=\dfrac{2}{|z|^2}z=\dfrac{2}{z\bar{z}}z=\dfrac{2}{\bar{z}}$

(2)　$w=z$ とすると, (1)より，$z=\dfrac{2}{|z|^2}z$

$z\neq 0$ より，$|z|^2=2$，$|z|=\sqrt{2}$

よって，点P(z)は原点を中心とする半径$\sqrt{2}$の円周上にあり，± 2，$\pm 2i$ の表す 4 点を頂点とする正方形との共有点を求めると，



$$z=1\pm i,\ -1\pm i$$

(3)　まず, 点P(z)が線分AB上を動くとき,

$$|z|=|z-(2+2i)|\cdots\cdots\cdots①,\ |z|\leqq 2\cdots\cdots\cdots②$$

(1)より，$w=\dfrac{2}{\bar{z}}$ なので，$\bar{z}=\dfrac{2}{w}\cdots\cdots\cdots③$

①より，$|\bar{z}|=|\overline{z-(2+2i)}|$，$|\bar{z}|=|\bar{z}-(2-2i)|$

③を代入して，$\left|\dfrac{2}{w}\right|=\left|\dfrac{2}{w}-(2-2i)\right|$，$\dfrac{2}{|w|}=\dfrac{2|1-(1-i)w|}{|w|}$

$$\left|(1-i)\left(w-\frac{1}{1-i}\right)\right|=1,\ \sqrt{2}\left|w-\frac{1+i}{2}\right|=1,\ \left|w-\frac{1+i}{2}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdots\cdots\cdots④$$

②より$|\bar{z}|\leqq 2$となり，③を代入して，$\left|\dfrac{2}{w}\right|\leqq 2$，$\dfrac{2}{|w|}\leqq 2$，$|w|\geqq 1\cdots\cdots\cdots⑤$

したがって，点P(z)が線分 AB 上を動くとき，点Q(w)は④と⑤を満たす曲線, すなわち点$\dfrac{1+i}{2}$を中心とし，半径$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$の円周上で，原点中心の単位円の外部または周上の部分を動く。

さて，点z_1が線分 AB 上を動くとき，z_1を原点のまわりに$\dfrac{1}{2}\pi$だけ回転した点をz_2，z_1を原点のまわりにπだけ回転した点をz_3，z_1を原点のまわりに$\dfrac{3}{2}\pi$だけ回転した点をz_4とすると,

$$z_2=iz_1,\ z_3=-z_1,\ z_4=-iz_1$$

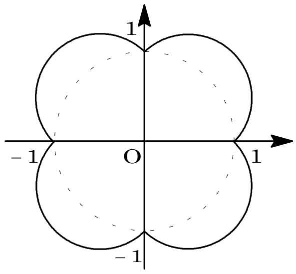
このとき点z_2は線分BC上，点z_3は線分CD上，点z_4はDA上をそれぞれ動く。

ここで，$w_1=\dfrac{2}{\overline{z_1}}$ とおくと，点 w_1 は④と⑤を満たす曲線上を動く。

すると，$w_2=\dfrac{2}{\overline{z_2}}=\dfrac{2}{-i\overline{z_1}}=i\dfrac{2}{\overline{z_1}}=iw_1$，$w_3=\dfrac{2}{\overline{z_3}}=\dfrac{2}{-\overline{z_1}}=-w_1$

$$w_4=\frac{2}{\overline{z_4}}=\frac{2}{i\overline{z_1}}=-i\frac{2}{\overline{z_1}}=-iw_1$$

以上より，点 w_2，w_3，w_4 は，動点 w_1 を原点のまわりに $\dfrac{1}{2}\pi$，π，$\dfrac{3}{2}\pi$ だけ回転した点となり，点 $\mathrm{Q}(w)$ の軌跡は，まとめると右図の実線のようになる。



[解 説]

複素数平面上における軌跡の問題で，昨年，名市大・医に類題が出ています。そのとき考えたのと同じ方針で，上の解を作りました。