1

解答解説のページへ

次の条件によって定められる数列$\{a_n\}$を考える。

$$a_1=1,\ a_{n+1}=4a_n+6n-2\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

次の問いに答えよ。

(1) 数列$\{b_n\}$を，$b_n=a_{n+1}-a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$とする。$\{b_n\}$の一般項を求めよ。

(2) 数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ を n を用いて表せ。

2

解答解説のページへ

1 辺の長さが 2 の正四面体 ABCD において，辺 AB, BC, CD, DA, AC, BD の中点をそれぞれ P, Q, R, S, T, U とする。次の問いに答えよ。

(1) 線分 PR の長さを求めよ。

(2) $\cos\angle\mathrm{SBR}$ の値を求めよ。

(3) 四角形 PTRU を底面，点 Q を頂点とする四角錐の体積を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

k を実数とする。全体集合を実数全体の集合とし，その部分集合 A, B を次のように定める。

$$A=\{x \mid x^3-x^2-(k^2+4k+4)x+k^2+4k+4=0\}$$
$$B=\{x \mid x^3-(k^2+3k+3)x^2+k^2x-k^4-3k^3-3k^2=0\}$$

次の問いに答えよ。

(1)　$k=-1$ のとき，集合 A，B，$A\cap B$，$A\cup B$ を，$\{a,\ b,\ c\}$ のように集合の要素を書き並べて表す方法により，それぞれ表せ。空集合になる場合は，空集合を表す記号で答えよ。

(2)　集合 B が集合 A の部分集合となるような k の値をすべて求めよ。そのような k の値が存在しない場合は，その理由を述べよ。

(3)　集合 $A\cup B$ の要素の個数を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

p は $p \geqq 0$ を満たす定数とし，関数 $f(x)$ を，$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-3x^2+(9-p^2)x$ と定める。次の問いに答えよ。

(1)　$p=1$ のとき，$y=f(x)$ のグラフをかけ。

(2)　$f'(x)=0$ となる x の値を p を用いて表せ。

(3)　$x \geqq 0$ において $f(x)$ が最小値をとる x の値を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}=4a_n+6n-2$ に対して，$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと，

$$b_{n+1}=a_{n+2}-a_{n+1}=4a_{n+1}+6(n+1)-2-(4a_n+6n-2)$$
$$=4(a_{n+1}-a_n)+6=4b_n+6$$

上式を $b_{n+1}+2=4(b_n+2)$ と変形し，$b_1=a_2-a_1=(4\cdot1+6-2)-1=7$ から，

$$b_n+2=(b_1+2)\cdot4^{n-1}=9\cdot4^{n-1}$$

したがって，$b_n=9\cdot4^{n-1}-2$ となる。

(2)　(1)から，$n\geqq2$ において，

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(9\cdot4^{k-1}-2)=1+9\cdot\frac{4^{n-1}-1}{4-1}-2(n-1)=3(4^{n-1}-1)-2n+3$$
$$=3\cdot4^{n-1}-2n$$ （この式は $n=1$ のときも成り立っている）

(3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(3\cdot4^{k-1}-2k)=3\cdot\frac{4^n-1}{4-1}-2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=4^n-n^2-n-1$

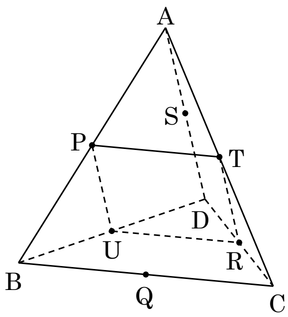
［解 説］

漸化式の基本題です。誘導なしで出題される場合もあります。

２

問題のページへ

(1)　1 辺の長さが 2 の正四面体 ABCD において，右図のように各辺の中点を P, Q, R, S, T, U とすると，中点連結定理より，$\mathrm{PT}=\mathrm{TR}=\mathrm{RU}=\mathrm{UP}=1$ となる。



ここで，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおくと，

$$|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|=2$$

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{d}=\vec{d}\cdot\vec{b}=2\cdot 2\cdot\cos 60^\circ=2$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{PT}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PU}}=\frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{b})\cdot\frac{1}{2}\vec{d}=\frac{1}{4}(2-2)=0$ から，四角形 PTRU は 1 辺の長さが 1 の正方形であり，その対角線 PR の長さは $\sqrt{2}$ である。

(2)　$\mathrm{BS}=\mathrm{BR}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，$\mathrm{RS}=1$ から，△BRS に余弦定理を適用すると，

$$\cos\angle\mathrm{SBR}=\frac{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2-1^2}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{5}{6}$$

(3)　正方形 PTRU の対角線の交点を H とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{QH}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AR}})-\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d})\right\}-\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})=-\frac{1}{4}(\vec{b}+\vec{c}-\vec{d})$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{QH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PT}}=-\frac{1}{4}(\vec{b}+\vec{c}-\vec{d})\cdot\frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{b})=-\frac{1}{8}(2-4+4-2-2+2)=0$

$$\overrightarrow{\mathrm{QH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PU}}=-\frac{1}{4}(\vec{b}+\vec{c}-\vec{d})\cdot\frac{1}{2}\vec{d}=-\frac{1}{8}(2+2-4)=0$$

これより，線分 PH は正方形 PTRU に垂直であり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{QH}}|^2=\frac{1}{16}(4+4+4+2\cdot 2-2\cdot 2-2\cdot 2)=\frac{1}{2},\ |\overrightarrow{\mathrm{QH}}|=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

したがって，四角錐 Q-PTRU の体積 V は，$V=\frac{1}{3}\cdot 1^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{6}$ である。

［解 説］

正四面体を題材にした空間ベクトルの応用問題です。各設問とも，いろいろな解法が考えられます。ただ，その要は，対称性に着目することですが。

3　問題のページへ

(1)　まず，$x^3-x^2-(k^2+4k+4)x+k^2+4k+4=0$ に対して，

$$x^2(x-1)-(k^2+4k+4)(x-1)=0\,,\ (x-1)\{x^2-(k+2)^2\}=0$$
$$(x-1)(x+k+2)(x-k-2)=0$$

また，$x^3-(k^2+3k+3)x^2+k^2x-k^4-3k^3-3k^2=0$ に対して，

$$x^2\{x-(k^2+3k+3)\}+k^2\{x-(k^2+3k+3)\}=0$$
$$(x^2+k^2)(x-k^2-3k-3)=0$$

したがって，$A=\{x\,|\,(x-1)(x+k+2)(x-k-2)=0\}$………①

$B=\{x\,|\,(x^2+k^2)(x-k^2-3k-3)=0\}$………②

さて，$k=-1$ のとき，①から，$A=\{x\,|\,(x-1)^2(x+1)=0\}=\{-1,\ 1\}$

②から，$B=\{x\,|\,(x^2+1)(x-1)=0\}=\{1\}$ となり，

$A\cap B=\{1\}$，$A\cup B=\{-1,\ 1\}$

(2)　B の要素の個数について，②より $k=0$ のときは 2 個，$k\neq 0$ のときは 1 個である。

ここで，B が A の部分集合となるのは，

(i)　$k=0$ のとき　$A=\{-2,\ 1,\ 2\}$，$B=\{0,\ 3\}$ なので，$B\subset A$ でない。

(ii)　$k\neq 0$ のとき　$B=\{k^2+3k+3\}$ から，B が A の部分集合となる必要条件は，

①から，$k^2+3k+3=1$ または $k^2+3k+3=-k-2$ または $k^2+3k+3=k+2$

(ii-i)　$k^2+3k+3=1$ のとき　$(k+1)(k+2)=0$ から，$k=-1,\ -2$，

・$k=-1$ のとき　(1)より $B\subset A$ である。

・$k=-2$ のとき　$A=\{0,\ 1\}$，$B=\{1\}$ より，$B\subset A$ である。

(ii-ii)　$k^2+3k+3=-k-2$ のとき　$k^2+4k+5=0$ から，実数 k は存在しない。

(ii-iii)　$k^2+3k+3=k+2$ のとき　$(k+1)^2=0$ から $k=-1$ なので $B\subset A$ である。

(i)(ii)より，B が A の部分集合となるのは，$k=-1,\ -2$ のときである。

(3)　A の要素の個数について，①より，2 個となるのは，$1=-k-2$ $(k=-3)$ のとき，$1=k+2$ $(k=-1)$ のとき，$-k-2=k+2$ $(k=-2)$ のときである。また，1 個だけとなるときはなく，$k\neq -3,\ -2,\ -1$ のときは 3 個である。

すると，$A\cup B$ の要素の個数を N とおくと，

(i)　$k=0$ のとき　(2)より $A\cup B=\{-2,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ なので $N=5$

(ii)　$k=-1$ のとき　(1)より $A\cup B=\{-1,\ 1\}$ なので $N=2$

(iii)　$k=-2$ のとき　(2)より $A\cup B=\{0,\ 1\}$ なので $N=2$

(iv)　$k=-3$ のとき　$A=\{-1,\ 1\}$，$B=\{3\}$ から $A\cup B=\{-1,\ 1,\ 3\}$ より $N=3$

(v)　$k\neq -3,\ -2,\ -1,\ 0$ のとき　$A=\{1,\ -k-2,\ k+2\}$，$B=\{k^2+3k+3\}$

$A\cup B=\{1,\ -k-2,\ k+2,\ k^2+3k+3\}$ より $N=4$

(i)〜(v)より，$A\cup B$ の要素の個数は,

$k=-1,\ -2$ のとき 2 個，$k=-3$ のとき 3 個，$k=0$ のとき 5 個

$k\neq -3,\ -2,\ -1,\ 0$ のとき 4 個

［解 説］

集合を題材とした問題です。内容的には場合分けの方法が問われており，慎重な処理が要求されます。なお，冒頭の 2 つの 3 次方程式の因数分解については，係数に着目した方法を採っています。

4

問題のページへ

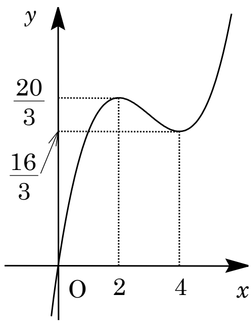
(1)　$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-3x^2+(9-p^2)x$ に対し，$p=1$ のとき，

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x$$

$$f'(x)=x^2-6x+8=(x-2)(x-4)$$

すると，$f(x)$ の増減は右表のようになり，$y=f(x)$ のグラフは右下図である。

x	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\dfrac{20}{3}$	$\searrow$	$\dfrac{16}{3}$	$\nearrow$



(2)　$p\geqq 0$ のとき，

$$f'(x)=x^2-6x+9-p^2=(x-3)^2-p^2$$
$$=(x-3+p)(x-3-p)$$

$f'(x)=0$ となる x の値は，

・$p=0$ のとき　$x=3$

・$p>0$ のとき　$x=3-p,\ 3+p$

(3)　$x\geqq 0$ において $f(x)$ が最小値をとる x の値について，

(i)　$p=0$ のとき　$f'(x)=(x-3)^2\geqq 0$

$f(x)$ は単調に増加するので，$x=0$ で $f(x)$ は最小値をとる。

(ii)　$p>0$ のとき

$f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	$\cdots$	$3-p$	$\cdots$	$3+p$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

(ii-i)　$3-p<0$ $(p>3)$ のとき

$x=3+p$ で $f(x)$ は最小値をとる。

(ii-ii)　$3-p\geqq 0$ $(0<p\leqq 3)$ のとき　$f(0)=0$ となり，

$$f(3+p)=\frac{1}{3}(3+p)\{(3+p)^2-9(3+p)+3(3+p)(3-p)\}$$
$$=\frac{1}{3}(3+p)^2\{(3+p)-9+3(3-p)\}=\frac{1}{3}(3+p)^2(3-2p)$$

・$3-2p>0$ $\left(0<p<\dfrac{3}{2}\right)$ のとき　$f(0)<f(3+p)$ より $x=0$ で最小値をとる。

・$3-2p=0$ $\left(p=\dfrac{3}{2}\right)$ のとき　$f(0)=f(3+p)$ より $x=0,\ 3+p$ で最小値をとる。

・$3-2p<0$ $\left(\dfrac{3}{2}<p\leqq 3\right)$ のとき　$f(0)>f(3+p)$ より $x=3+p$ で最小値をとる。

(i)(ii)より，$x\geqq 0$ において $f(x)$ が最小値をとる x の値は，

$0\leqq p<\dfrac{3}{2}$ のとき $x=0$，$p=\dfrac{3}{2}$ のとき $x=0,\ 3+p$，$\dfrac{3}{2}<p$ のとき $x=3+p$

［解　説］

微分と増減の標準題です。丁寧な場合分けがポイントになります。