$\boxed{1}$

解答解説のページへ

四面体 OABC において三角形 ABC の重心を D, 線分 AB を $2:1$ に内分する点を E, 線分 AC を $5:2$ に外分する点を F とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ として, 次の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

(3) 点 G は点 E を通り $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に平行な直線上にある。点 H は点 F を通り $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に平行な直線上にある。3 点 D, G, H が一直線上にあるとき, ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

2

解答解説のページへ

平面上に正五角形 ABCDE があり，頂点 A, B, C, D, E は時計回りに配置されている。点 P をまず頂点 A の位置に置き，この正五角形の辺にそって時計回りに頂点から頂点へ与えられた正の整数 n だけ動かす。たとえば，$n=2$ ならば点 P は頂点 C の位置にあり，$n=6$ ならば点 P は頂点 B の位置にある。次の問いに答えよ。

(1) さいころを 2 回投げて出た目の和で n を与えるとき，点 P が頂点 A, B, C, D, E の位置にある確率をそれぞれ求めよ。

(2) さいころを 3 回投げて出た目の和で n を与えるとき，点 P が頂点 D の位置にある確率を求めよ。

(3) さいころを 5 回投げて出た目の和で n を与えるとき，点 P が頂点 A の位置にある確率を求めよ。

$\boxed{3}$　　解答解説のページへ

座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}(0,\ -1)$，$\mathrm{B}(1,\ 2)$ を通る直線を l とする。また，中心 $(3,\ -2)$，半径 3 の円を C とする。次の問いに答えよ。

(1)　l の方程式を求めよ。

(2)　l と C は共有点をもたないことを示せ。

(3)　点 P が円 C 上を動くとき，三角形 ABP の重心の軌跡を T とする。T はどのような図形になるか答えよ。

(4)　(3)で求めた図形 T 上の点 $(x,\ y)$ に対して $\sqrt{x^2+y^2}$ の最大値と最小値を求めよ。

4

解答解説のページへ

関数 $f(x)$ を，$f(x)=x|x-1|-3x+3$ と定める。次の問いに答えよ。

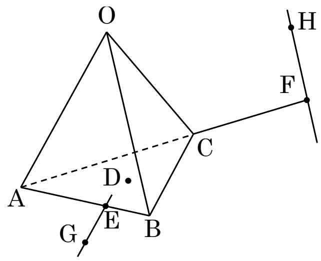
(1)　$y=f(x)$ のグラフをかけ。

(2)　a の値が $-3 \leqq a \leqq -2$ の範囲で動くとき，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=ax+3$ で囲まれた図形の面積 S を a を用いて表せ。

(3)　(2)で与えられた S に対して，a の値が $-3 \leqq a \leqq -2$ の範囲で動くとき，S の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの a の値を求めよ。

1

問題のページへ



(1) 四面体 OABC において，△ABC の重心を D とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})=\vec{a}+\frac{1}{3}(\vec{b}-\vec{a}+\vec{c}-\vec{a})$$
$$=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$

(2) 線分 AB を $2:1$ に内分する点を E, 線分 AC を $5:2$ に外分する点を F とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2+1}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b},\ \ \overrightarrow{\mathrm{OF}}=\frac{-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+5\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{5-2}=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{5}{3}\vec{c}$$

(3) 点 G は点 E を通り $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に平行な直線上, 点 H は点 F を通り $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に平行な直線上にあるので, s, t を実数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}+s\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\Big(\frac{1}{3}+s\Big)\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b},\ \ \overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OF}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\frac{2}{3}\vec{a}+t\vec{b}+\frac{5}{3}\vec{c}$$

ここで, 3 点 D, G, H が一直線上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{DH}}=k\overrightarrow{\mathrm{DG}}$ (k は実数) より，

$$-\frac{2}{3}\vec{a}+t\vec{b}+\frac{5}{3}\vec{c}-\Big(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\Big)=k\Big\{\Big(\frac{1}{3}+s\Big)\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}-\Big(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\Big)\Big\}$$
$$-\vec{a}+\Big(t-\frac{1}{3}\Big)\vec{b}+\frac{4}{3}\vec{c}=k\Big(s\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{c}\Big)$$

すると，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立なので，

$$-1=ks\cdots\cdots\cdots①,\ \ t-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}k\cdots\cdots\cdots②,\ \ \frac{4}{3}=-\frac{1}{3}k\cdots\cdots\cdots③$$

③より $k=-4$ となり，①より $s=\dfrac{1}{4}$，②より $t=-1$ なので，

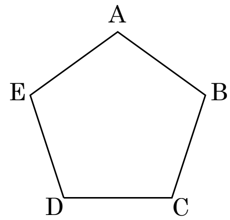
$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{7}{12}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b},\ \ \overrightarrow{\mathrm{OH}}=-\frac{2}{3}\vec{a}-\vec{b}+\frac{5}{3}\vec{c}$$

［解 説］

空間ベクトルの四面体への応用についての基本題です。

2

問題のページへ



(1) 正五角形 ABCDE に対して，点 P をまず頂点 A の位置に置き，この正五角形の辺にそって時計回りに頂点から頂点へ与えられた正の整数 n だけ動かす。

さいころを 2 回投げて出た目の和で n を与えるとき，さいころの目とその和 n の関係をまとめると，右下表のようになる。

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

(i)　点 P が頂点 A の位置にあるとき

$n=5,\ 10$ より，その確率は $\dfrac{4+3}{6^2}=\dfrac{7}{36}$

(ii)　点 P が頂点 B の位置にあるとき

$n=6,\ 11$ より，その確率は $\dfrac{5+2}{6^2}=\dfrac{7}{36}$

(iii) 点 P が頂点 C の位置にあるとき

$n=2,\ 7,\ 12$ より，その確率は $\dfrac{1+6+1}{6^2}=\dfrac{2}{9}$

(iv) 点 P が頂点 D の位置にあるとき　$n=3,\ 8$ より，その確率は $\dfrac{2+5}{6^2}=\dfrac{7}{36}$

(v)　点 P が頂点 E の位置にあるとき　$n=4,\ 9$ より，その確率は $\dfrac{3+4}{6^2}=\dfrac{7}{36}$

(2)　さいころを k 回投げたとき，点 P が頂点 A, B, C, D, E の位置にある確率をそれぞれ a_k，b_k，c_k，d_k，e_k とおく。

さて，さいころを 3 回投げて出た目の和で n を与えるとき，点 P が頂点 D の位置にある確率 d_3 は,

$$d_3=\frac{1}{6}a_2+\frac{1}{6}b_2+\frac{1}{3}c_2+\frac{1}{6}d_2+\frac{1}{6}e_2=\frac{1}{6}(1-c_2)+\frac{1}{3}c_2=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}c_2$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{9}=\frac{11}{54}$$

(3)　さいころを 5 回投げて出た目の和で n を与えるとき，点 P が頂点 A の位置にある確率 a_5 は,

$$a_5=\frac{1}{6}a_4+\frac{1}{6}b_4+\frac{1}{6}c_4+\frac{1}{6}d_4+\frac{1}{3}e_4=\frac{1}{6}(1-e_4)+\frac{1}{3}e_4=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}e_4$$

$$e_4=\frac{1}{6}a_3+\frac{1}{6}b_3+\frac{1}{6}c_3+\frac{1}{3}d_3+\frac{1}{6}e_3=\frac{1}{6}(1-d_3)+\frac{1}{3}d_3=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}d_3$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{11}{54}=\frac{65}{324}$$

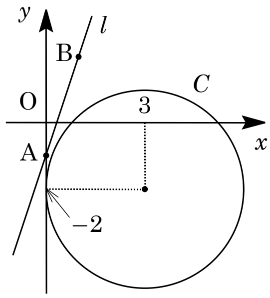
よって，$a_5=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{65}{324}=\dfrac{389}{1944}$ となる。

［解　説］

確率の標準的な問題です。(2)で漸化式の利用という考え方の切替がポイントです。

3

問題のページへ



(1)　2 点 A$(0,\ -1)$，B$(1,\ 2)$ を通る直線 l の方程式は,

$$y=\frac{2-(-1)}{1-0}x-1,\quad y=3x-1$$

(2)　円 C の中心 $(3,\ -2)$ と $l: 3x-y-1=0$ の距離 d は,

$$d=\frac{|3\cdot3-(-2)-1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$$

すると, d は C の半径 3 より大なので, l と C は共有点をもたない。

(3)　円 $C: (x-3)^2+(y+2)^2=9$ 上を動く点 P$(s,\ t)$ について,

$$(s-3)^2+(t+2)^2=9\cdots\cdots\cdots①$$

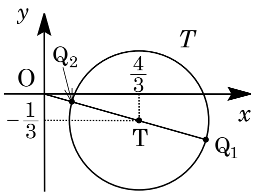
ここで, △ABP の重心 G$(x,\ y)$ の軌跡を T とすると,

$$x=\frac{1}{3}(0+1+s)=\frac{1}{3}(s+1)\cdots\cdots②,\quad y=\frac{1}{3}(-1+2+t)=\frac{1}{3}(t+1)\cdots\cdots③$$

②より $s=3x-1$，③より $t=3y-1$ となり, ①に代入すると,

$$(3x-1-3)^2+(3y-1+2)^2=9,\quad \left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y+\frac{1}{3}\right)^2=1$$

よって, 軌跡 T は, 中心 T$\left(\frac{4}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$ で半径 1 の円である。



(4)　軌跡 T 上の点 Q$(x,\ y)$ に対して, $\mathrm{OQ}=\sqrt{x^2+y^2}$ となり,

$$\mathrm{OT}=\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{17}}{3}$$

T の半径 1 より, OQ の最大値は $\mathrm{OQ_1}=\mathrm{OT}+1=\frac{\sqrt{17}}{3}+1$，最小値は $\mathrm{OQ_2}=\mathrm{OT}-1=\frac{\sqrt{17}}{3}-1$ である。

［解 説］

円と直線を題材にした軌跡の問題です。教科書の例題に載るような典型題です。

4

問題のページへ

(1)　$f(x)=x|x-1|-3x+3$ に対して,

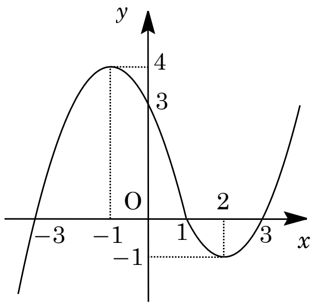
(i)　$x\geqq 1$ のとき　$f(x)=x(x-1)-3x+3$ となり,

$$f(x)=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$$

(ii)　$x<1$ のとき　$f(x)=-x(x-1)-3x+3$ となり,

$$f(x)=-x^2-2x+3=-(x+1)^2+4$$

(i)(ii)より，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。



(2)　曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=ax+3$ $(-3\leqq a\leqq -2)$ との共有点は,

(i)　$x\geqq 1$ のとき　$x^2-4x+3=ax+3$ より,

$$x^2-(a+4)x=0,\ x=0,\ a+4$$

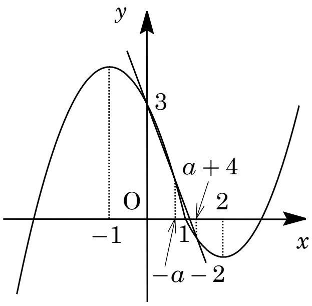
$x\geqq 1$ と合わせると，$1\leqq a+4\leqq 2$ より $x=a+4$

(ii)　$x<1$ のとき　$-x^2-2x+3=ax+3$ より,

$$x^2+(a+2)x=0,\ x=0,\ -a-2$$

$x<1$ と合わせると，$0\leqq -a-2\leqq 1$ より $x=0,\ -a-2$

(i)(ii)より，共有点は $x=0,\ -a-2,\ a+4$ である。



さて，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=ax+3$ で囲まれた図形の面積 S に対して,

$$S_1=\int_0^{-a-2}\{(-x^2-2x+3)-(ax+3)\}dx=-\int_0^{-a-2}\{x^2+(a+2)x\}dx$$

$$=-\int_0^{-a-2}x(x+a+2)dx=\frac{1}{6}(-a-2)^3=-\frac{1}{6}(a+2)^3$$

$$S_2=\int_{-a-2}^{1}\{(ax+3)-(-x^2-2x+3)\}dx=\int_{-a-2}^{1}\{x^2+(a+2)x\}dx$$

$$=\Big[\frac{x^3}{3}+\frac{a+2}{2}x^2\Big]_{-a-2}^{1}=\frac{1}{3}\{1-(-a-2)^3\}+\frac{a+2}{2}\{1-(-a-2)^2\}$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}(a+2)^3+\frac{a+2}{2}-\frac{1}{2}(a+2)^3=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}(a+2)^3+\frac{a+2}{2}$$

$$S_3=\int_1^{a+4}\{(ax+3)-(x^2-4x+3)\}dx=\int_1^{a+4}-\{x^2-(a+4)x\}dx$$

$$=\Big[-\frac{x^3}{3}+\frac{a+4}{2}x^2\Big]_1^{a+4}=-\frac{1}{3}\{(a+4)^3-1\}+\frac{a+4}{2}\{(a+4)^2-1\}$$

$$=-\frac{1}{3}(a+4)^3+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}(a+4)^3-\frac{a+4}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}(a+4)^3-\frac{a+4}{2}$$

すると，$S=S_1+S_2+S_3$ なので,

$$S=-\frac{1}{6}(a+2)^3+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}(a+2)^3+\frac{a+2}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}(a+4)^3-\frac{a+4}{2}$$

$$=\frac{1}{6}(a+4)^3-\frac{1}{3}(a+2)^3-\frac{1}{3}=-\frac{1}{6}a^3+4a+\frac{23}{3}$$

(3)　(2)より $S'=-\frac{1}{2}a^2+4=-\frac{1}{2}(a^2-8)$

これより，$-3\leqq a\leqq -2$ における S の増減は右表のようになる。

a	-3	$\cdots$	$-2\sqrt{2}$	$\cdots$	-2
S'		$-$	0	$+$	
S	$\frac{1}{6}$	$\searrow$	$\frac{23-16\sqrt{2}}{3}$	$\nearrow$	1

よって，S は $a=-2$ のとき最大値 1，$a=-2\sqrt{2}$ のとき最小値 $\frac{23-16\sqrt{2}}{3}$ をとる。

［解　説］

微積分の総合問題です。ただ，数値計算はかなり面倒です。