1

問題のページへ

(1) x, y を任意の実数として，$\vec{p}=(x,\ y)$ とおく。

条件より，$(\vec{a}\cdot\vec{p})^2+(\vec{b}\cdot\vec{p})^2=|\vec{p}|^2$ なので,

$$(a_1x+a_2y)^2+(b_1x+b_2y)^2=x^2+y^2 \cdots\cdots\cdots ①$$

$(x,\ y)=(1,\ 0)$ に対して①が成立することより，$a_1{}^2+b_1{}^2=1 \cdots\cdots\cdots$②

$(x,\ y)=(0,\ 1)$ に対して①が成立することより，$a_2{}^2+b_2{}^2=1 \cdots\cdots\cdots$③

$(x,\ y)=(1,\ 1)$ に対して①が成立することより，$(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2=2$

②③を代入して，$a_1a_2+b_1b_2=0 \cdots\cdots\cdots$④

逆に②③④が成立するとき，任意の実数 x, y に対して，①は明らかに成立する。

よって，求める条件は，ある $(b_1,\ b_2)$ に対して，②③④が成立する条件となる。

まず，②より $a_1=\cos\theta,\ b_1=\sin\theta$，③より $a_2=\cos\varphi,\ b_2=\sin\varphi$ とおくことができる。

④に代入して，$\cos\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi=0$，$\cos(\theta-\varphi)=0$

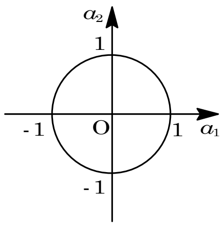
すると $\theta-\varphi=\pm 90^\circ$ より，$\varphi=\theta\mp 90^\circ$ となる。

以下，複号同順で,

$$a_1=\cos\theta,\ a_2=\cos(\theta\mp 90^\circ)=\pm\sin\theta \cdots\cdots\cdots ⑤$$

θ は任意より，$a_1{}^2+a_2{}^2=1$

以上より，点 $(a_1,\ a_2)$ は原点中心の単位円周上に存在し，図示すると右図のようになる。



(2) (1)より，$b_1=\sin\theta,\ b_2=\sin(\theta\mp 90^\circ)=\mp\cos\theta$

⑤より，$b_1=\pm a_2,\ b_2=\mp a_1$

よって，$\vec{b}=(a_2,\ -a_1)$ または $\vec{b}=(-a_2,\ a_1)$

[解 説]

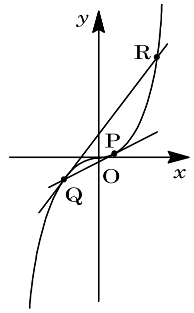
かなり丁寧に解を書きました。任意の x, y に対し，①が成立する必要十分条件については，もっとあっさり書いても構わないと思います。

2

問題のページへ

点$\mathrm{P}(t,\ t^3)$，$\mathrm{Q}(s,\ s^3)$，$\angle\mathrm{PQR}=\theta$ とおく。

曲線$y=x^3$……①は原点対称なので，$t>0$ としても一般性を失わない。



①より，$y'=3x^2$なので, P における接線は,

$$y=3t^2(x-t)+t^3=3t^2x-2t^3 \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$x^3=3t^2x-2t^3$，$x^3-3t^2x+2t^3=0$

$$(x-t)^2(x+2t)=0$$

$x=t,\ -2t$ より，$s=-2t$ ………③

ここで，直線 PQ の傾きは$3t^2$，直線 RQ の傾きは③を用いると$3s^2=12t^2$となる。

$$\tan\theta=\frac{12t^2-3t^2}{1+12t^2\cdot 3t^2}=\frac{9t^2}{1+36t^4}$$

さて，$3t^2=u>0$ とし，$f(u)=\dfrac{3u}{1+4u^2}$ とおくと,

$$f'(u)=\frac{3(1+4u^2)-3u\cdot 8u}{(1+4u^2)^2}=\frac{3(1-4u^2)}{(1+4u^2)^2}$$

u	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	∞
$f'(u)$		$+$	0	$-$	
$f(u)$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{4}$	$\searrow$	0

右表より，$u>0$ で$0<f(u)\leqq\dfrac{3}{4}$

すなわち，$0<\tan\theta\leqq\dfrac{3}{4}$

$1<\dfrac{1}{\cos^2\theta}\leqq 1+\left(\dfrac{3}{4}\right)^2=\dfrac{25}{16}$ より，$\dfrac{16}{25}\leqq\cos^2\theta<1$

$\tan\theta>0$ よりθは鋭角なので，$\dfrac{4}{5}\leqq\cos\theta<1$

[解　説]

平面上の 2 直線のなす角の扱い方には，ベクトルの内積利用と tan の加法定理の利用という 2 種類があります。本問では cos を求めるので，前者で計算をしていきましたが，微分したところでスゴイ式が出てしまい沈没しました。そこで，それまでの計算を御破算にして作ったのが上の解です。

3

問題のページへ

(1)　まず, N 個の箱に玉を 1 つずつ k 回入れるとき, N^k 通りの場合がある。

また, ちょうど k 回目で玉が 2 つ入った箱ができるのは, N 個の箱から $k-1$ 個の箱を選んで玉を 1 つずつ入れ, k 回目にその選んだ箱の 1 つに玉を入れる場合である。その場合の数は ${}_N\mathrm{P}_{k-1}\times(k-1)$ となる。

よって, $P(N,\ k)=\dfrac{{}_N\mathrm{P}_{k-1}\times(k-1)}{N^k}$

(2)　$\log P(2N,\ N+1)=F$ とおくと, (1)より,

$$F=\log\frac{{}_{2N}\mathrm{P}_N\times N}{(2N)^{N+1}}=\log\frac{{}_{2N}\mathrm{P}_N}{2^{N+1}N^N}$$
$$=\log\frac{1}{2^{N+1}}\cdot\frac{(N+1)(N+2)\cdots\cdots(N+N)}{N^N}$$
$$=\log\frac{1}{2^{N+1}}\left(1+\frac{1}{N}\right)\left(1+\frac{2}{N}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{N}{N}\right)$$
$$=-(N+1)\log 2+\log\left(1+\frac{1}{N}\right)+\log\left(1+\frac{2}{N}\right)+\cdots\cdots+\log\left(1+\frac{N}{N}\right)$$
$$=-(N+1)\log 2+\sum_{k=1}^{N}\log\left(1+\frac{k}{N}\right)$$

すると, $\dfrac{1}{N}F=-\dfrac{N+1}{N}\log 2+\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\log\left(1+\frac{k}{N}\right)$

$$\to-\log 2+\int_0^1\log(1+x)\,dx\quad(n\to\infty)$$
$$=-\log 2+\Big[(1+x)\log(1+x)\Big]_0^1-\int_0^1 dx$$
$$=\log 2-1$$

よって, $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log P(2N,\ N+1)=\log 2-1$

[解 説]

確率の極限と区分求積法の融合という 2, 3 年に一度, どこかの大学で出題されてきた問題です。このタイプの問題では, 確率の極限値を求めるときに区分求積法を用いるということに気付くのがポイントなのですが, ここでは問題文中に誘導があるので, さほど難しくはありません。

4　問題のページへ

(1)　$m(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_4)=2^{k_1+k_2+k_3+k_4}-2^{k_2+k_3+k_4}-2^{k_3+k_4}-2^{k_4}$

$$=2^{k_4}(2^{k_1+k_2+k_3}-2^{k_2+k_3}-2^{k_3}-1)$$

$k_1\geqq1,\ k_2\geqq1,\ k_3\geqq1$ より，$2^{k_1+k_2+k_3}-2^{k_2+k_3}-2^{k_3}-1$ は奇数であり，また $k_4=0$ のとき 2^{k_4} は奇数，$k_4\geqq1$ のとき 2^{k_4} は偶数となる。

1999 は奇数より $k_4=0$ となり，このとき $2^{k_1+k_2+k_3}-2^{k_2+k_3}-2^{k_3}-1=1999$

$$2^{k_3}(2^{k_1+k_2}-2^{k_2}-1)=2000=2^4\times125$$

$2^{k_1+k_2}-2^{k_2}-1$ は奇数より $k_3=4$ となり，このとき $2^{k_1+k_2}-2^{k_2}-1=125$

$$2^{k_2}(2^{k_1}-1)=126=2\times63$$

$2^{k_1}-1$ は奇数より $k_2=1$ となり，このとき $2^{k_1}-1=63$

$2^{k_1}=64=2^6$ より，$k_1=6$ となるので，$(k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4)=(6,\ 1,\ 4,\ 0)$

(2)　$m(k_1,\ k_2)=m(l_1,\ l_2)=N$ とおくと，$2^{k_2}(2^{k_1}-1)=2^{l_2}(2^{l_1}-1)=N$

ただし，$k_1\geqq1,\ k_2\geqq0,\ l_1\geqq1,\ l_2\geqq0$ である。

N が奇数のとき，$k_2=l_2=0$ となり，$2^{k_1}-1=2^{l_1}-1$ より $k_1=l_1$

N が偶数のとき，$N=2^iM$ （i は自然数, M は奇数）とおくと,

$$2^{k_2}(2^{k_1}-1)=2^{l_2}(2^{l_1}-1)=2^iM$$

よって，$k_2=l_2=i$ となり，$2^{k_1}-1=2^{l_1}-1$ より $k_1=l_1$

したがって, N の偶奇にかかわらず, $k_1=l_1$，$k_2=l_2$ が成り立つ。

(3)　(2)との結果と合わせて, $n\geqq2$ において，題意成立を数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=2$ のとき　(2)より成立する。

(ii)　$n=p$ のとき　題意の成立を仮定する。

ここで，$m(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_p,\ k_{p+1})=m(l_1,\ l_2,\ \cdots,\ l_p,\ l_{p+1})=N$ とすると,

$$2^{k_{p+1}}(2^{k_1+\cdots+k_p}-2^{k_2+\cdots+k_p}-\cdots-2^{k_p}-1)=2^{l_{p+1}}(2^{l_1+\cdots+l_p}-2^{l_2+\cdots+l_p}-\cdots-2^{l_p}-1)$$

$$2^{k_{p+1}}\{m(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_p)-1\}=2^{l_{p+1}}\{m(l_1,\ l_2,\ \cdots,\ l_p)-1\}=N$$

$k_1\geqq1,\ \cdots\cdots,\ k_p\geqq1,\ l_1\geqq1,\ \cdots\cdots,\ l_p\geqq1$ より，$m(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_p)-1$, $m(l_1,\ l_2,\ \cdots,\ l_p)-1$ はともに奇数となる。

すると，N が奇数では $k_{p+1}=l_{p+1}=0$ となり，N が偶数では $k_{p+1}=l_{p+1}\geqq1$ となることより, N の偶奇にかかわらず，$m(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_p)=m(l_1,\ l_2,\ \cdots,\ l_p)$

仮定より $k_j=l_j\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ p)$ なので，$n=p+1$ のときも題意が成立する。

(i)(ii)より, $n\geqq2$ において，題意が成立する。

[解 説]

(1)によって(2)(3)の方針が決まります。4 題中いちばんおもしろい問題です。