1

解答解説のページへ

a を実数とし，2 つの関数 $f(x)=x^3-(a+2)x^2+(a-2)x+2a+1$ と $g(x)=-x^2+1$ を考える。

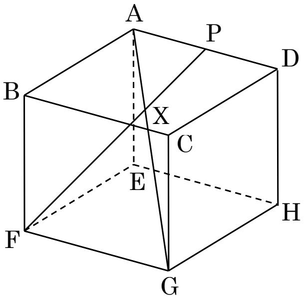
(1)　$f(x)-g(x)$ を因数分解せよ。

(2)　$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフの共有点が 2 個であるような a を求めよ。

(3)　a は(2)の条件を満たし，さらに $f(x)$ の極大値は 1 よりも大きいとする。$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフを同じ座標平面に図示せよ。

2

解答解説のページへ



図のような 1 辺の長さが 1 の立方体 ABCD-EFGH において，辺 AD 上に点 P をとり，線分 AP の長さを p とする。このとき，線分 AG と線分 FP は四角形 ADGF 上で交わる。その交点を X とする。

(1)　線分 AX の長さを p を用いて表せ。

(2)　三角形 APX の面積を p を用いて表せ。

(3)　四面体 ABPX と四面体 EFGX の体積の和を V とする。V を p を用いて表せ。

(4)　点 P を辺 AD 上で動かすとき，V の最小値を求めよ。

3

解答解説のページへ

数字 1 が書かれた球が 2 個，数字 2 が書かれた球が 2 個，数字 3 が書かれた球が 2 個，数字 4 が書かれた球が 2 個，合わせて 8 個の球が袋に入っている。カードを 8 枚用意し，次の試行を 8 回行う。

袋から球を 1 個取り出し，数字 k が書かれていたとき，

・残っているカードの枚数が k 以上の場合，カードを 1 枚取り除く。

・残っているカードの枚数が k 未満の場合，カードは取り除かない。

(1)　取り出した球を毎回袋の中に戻すとき，8 回の試行のあとでカードが 1 枚だけ残っている確率を求めよ。

(2)　取り出した球を袋の中に戻さないとき，8 回の試行のあとでカードが残っていない確率を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$f(x)=x^3-(a+2)x^2+(a-2)x+2a+1$，$g(x)=-x^2+1$ に対して，

$$f(x)-g(x)=x^3-(a+1)x^2+(a-2)x+2a=(x+1)\{x^2-(a+2)x+2a\}$$
$$=(x+1)(x-2)(x-a)$$

(2)　$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフの共有点の x 座標は，$f(x)-g(x)=0$ より，

$x=-1,\ 2,\ a$

すると，共有点が 2 個の条件は，$a=-1$ または $a=2$ である。

(3)　(i)　$a=-1$ のとき

$f(x)=x^3-x^2-3x-1$，$f(x)-g(x)=(x+1)^2(x-2)$

ここで，$f'(x)=3x^2-2x-3$ から，$f'(x)=0$ の解を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと，

$$\alpha=\frac{1-\sqrt{10}}{3},\ \beta=\frac{1+\sqrt{10}}{3}$$

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

これより，$f(x)$ の増減は右表のようになり，極大値は $f(\alpha)$ となる。

さて，$-1<x<2$ において，$f(x)-g(x)<0$ すなわち $f(x)<g(x)$ である。

すると，$-1<\alpha<2$ なので $f(\alpha)<g(\alpha)\leqq g(0)=1$ となり，条件に反する。

(ii)　$a=2$ のとき

$f(x)=x^3-4x^2+5$，$f(x)-g(x)=(x+1)(x-2)^2$

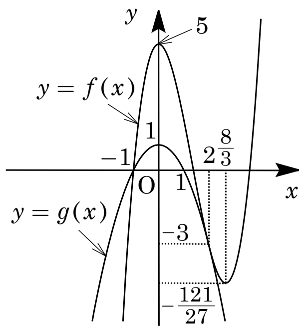
ここで，$f'(x)=3x^2-8x=x(3x-8)$ から，$f'(x)=0$ の解は $x=0,\ \dfrac{8}{3}$ となる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{8}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\frac{121}{27}$	$\nearrow$

これより，$f(x)$ の増減は右表のようになり，極大値は $f(0)=5$ で，条件を満たす。

(i)(ii)より，$a=2$，$f(x)=x^3-4x^2+5$ である。

以上より，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフは，$x=-1$ で交わり，$x=2$ で接することに注意すると，右図のようになる。

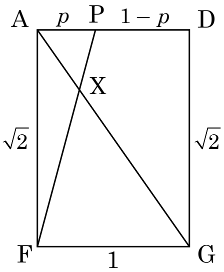


［解　説］

微分と増減に関する標準的な問題です。(3)の(i)の場合の極大値は次数下げの方法で求まりますが，ここは「1 よりも大きい」という表現に着目をし，グラフをもとに考えました。

2

問題のページへ



(1)　立方体 ABCD-EFGH において，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{FG}}$ から 4 点 A, F, G, D は同一平面上にあり，しかも $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ から四角形 ADGF は，$\mathrm{AD}=\mathrm{FG}=1$，$\mathrm{AF}=\mathrm{DG}=\sqrt{2}$ の長方形となる。

すると，$\mathrm{AX}:\mathrm{XG}=\mathrm{AP}:\mathrm{FG}$ となり，$\mathrm{AP}=p$ から，

$$\mathrm{AX}:\mathrm{XG}=p:1$$

よって，$\mathrm{AG}=\sqrt{3}$ から，$\mathrm{AX}=\dfrac{p}{p+1}\mathrm{AG}=\dfrac{\sqrt{3}p}{p+1}$

(2)　点 X と辺 AD との距離は，$\dfrac{p}{p+1}\mathrm{AF}=\dfrac{\sqrt{2}p}{p+1}$ なので，

$$\triangle\mathrm{APX}=\frac{1}{2}p\cdot\frac{\sqrt{2}p}{p+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{p^2}{p+1}$$

(3)　まず，$\triangle\mathrm{ABP}=\dfrac{1}{2}p\cdot 1=\dfrac{1}{2}p$，$\triangle\mathrm{EFG}=\dfrac{1}{2}\cdot 1^2=\dfrac{1}{2}$ である。

ここで，点 X と平面 ABCD，平面 EFGH の距離は，それぞれ $\dfrac{p}{p+1}$，$\dfrac{1}{p+1}$ より，

四面体 ABPX と四面体 EFGX の体積の和 V は，

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}p\cdot\frac{p}{p+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+1}=\frac{p^2+1}{6(p+1)}\cdots\cdots\cdots(*)$$

(4)　$0\leqq p\leqq 1$ において，$(*)$より，

$$V=\frac{1}{6}\cdot\frac{p^2+1}{p+1}=\frac{1}{6}\left(p-1+\frac{2}{p+1}\right)=\frac{1}{6}\left(p+1+\frac{2}{p+1}-2\right)$$

ここで，$p+1>0$ から，相加平均と相乗平均の関係を用いて，

$$p+1+\frac{2}{p+1}\geqq 2\sqrt{(p+1)\cdot\frac{2}{p+1}}=2\sqrt{2}$$

等号は $p+1=\dfrac{2}{p+1}$，すなわち $(p+1)^2=2$ から $p=\sqrt{2}-1$ のとき成り立つ。

よって，V の最小値は，$\dfrac{1}{6}(2\sqrt{2}-2)=\dfrac{1}{3}(\sqrt{2}-1)$ である。

［解　説］

立体図形の計量問題です。最初は，たとえば点 E を原点とする座標系を設定するのかとも思いましたが，それほどでもありませんでした。

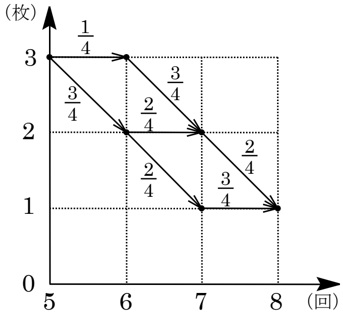
3

問題のページへ

(1)　数字 1, 数字 2, 数字 3, 数字 4 が書かれた球がそれぞれ 2 個ずつ入っている袋とカード 8 枚を用意する。このとき, 袋から 1 個の球を取り出し, 数字 k が書かれていたとき, 残っているカードの枚数が k 以上の場合はカードを 1 枚取り除き, k 未満の場合はカードを取り除かないという試行を行う。

すると, 数字の最大値は 4 なので, 球を 5 回取り出すと, どの球を取り出しても, カードの枚数は 8 枚→7 枚→6 枚→5 枚→4 枚→3 枚と変化する。

さて, 取り出した球を毎回袋の中に戻すとき, 8 回の試行のあとでカードが 1 枚だけ残っているのは, 3 つの場合があり, その確率は,



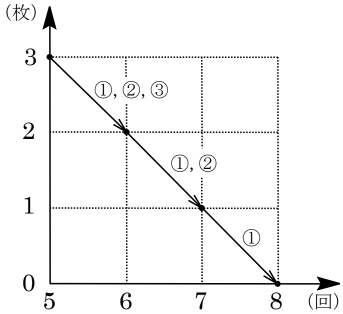
・3 枚→3 枚→2 枚→1 枚の場合　$\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{4}=\frac{6}{64}$

・3 枚→2 枚→2 枚→1 枚の場合　$\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{4}=\frac{12}{64}$

・3 枚→2 枚→1 枚→1 枚の場合　$\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{18}{64}$

以上より, 求める確率は $\frac{6}{64}+\frac{12}{64}+\frac{18}{64}=\frac{9}{16}$ である。

(2)　取り出した球を袋の中に戻さないとき, 8 回の試行のあとでカードが残っていないのは, 5 回目以降に, 3 枚→2 枚→1 枚→0 枚の場合だけである。そして, 1 枚→0 枚は数字 1 の球を取り出す場合, 2 枚→1 枚は数字 1 または 2 の球を取り出す場合, 3 枚→2 枚は数字 1 または 2 または 3 の球を取り出す場合となる。



ここで, これらの 3 回の取り出し方の組合せを考えていくと, その確率は,

・数字 2→数字 1→数字 1 と取り出すとき　$\frac{2\cdot2\cdot1}{{}_8\mathrm{P}_3}=\frac{4}{8\cdot7\cdot6}$

・数字 3→数字 1→数字 1 と取り出すとき　$\frac{2\cdot2\cdot1}{{}_8\mathrm{P}_3}=\frac{4}{8\cdot7\cdot6}$

・数字 1→数字 2→数字 1 と取り出すとき　$\frac{2\cdot2\cdot1}{{}_8\mathrm{P}_3}=\frac{4}{8\cdot7\cdot6}$

・数字 2→数字 2→数字 1 と取り出すとき　$\frac{2\cdot1\cdot2}{{}_8\mathrm{P}_3}=\frac{4}{8\cdot7\cdot6}$

・数字 3→数字 2→数字 1 と取り出すとき　$\frac{2\cdot2\cdot2}{{}_8\mathrm{P}_3}=\frac{8}{8\cdot7\cdot6}$

以上より, 求める確率は $\frac{4}{8\cdot7\cdot6}+\frac{4}{8\cdot7\cdot6}+\frac{4}{8\cdot7\cdot6}+\frac{4}{8\cdot7\cdot6}+\frac{8}{8\cdot7\cdot6}=\frac{1}{14}$ である。

［解 説］

読解力が要求される確率の問題です。数え漏れがないように，解答例に書いた図をもとに考えています。なお，(2)の確率計算で，たとえば「数字 2→数字 1→数字 1」の場合，分母を$8!$とすると分子は$2\cdot 2\cdot 1\cdot 5!$となります。