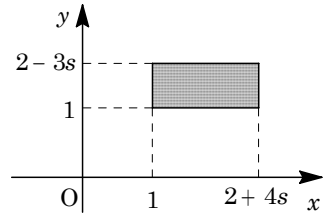


1

問題のページへ

- (1) 右図の長方形 R_s を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体 K_s の体積 $V(s)$ は、

$$\begin{aligned} V(s) &= \pi \{ (2-3s)^2 - 1^2 \} (2+4s-1) \\ &= 3\pi (3s^2 - 4s + 1)(4s + 1) \\ V'(s) &= 3\pi \{ (6s-4)(4s+1) + 4(3s^2 - 4s + 1) \} \\ &= 6\pi s(18s-13) \end{aligned}$$



すると、 $-\frac{1}{4} < s < \frac{1}{3}$ における $V(s)$ の増減は右表のようになる。

よって、 $V(s)$ は、 $s=0$ のとき最大値 3π をとる。

s	$-\frac{1}{4}$...	0	...	$\frac{1}{3}$
$V'(s)$		+	0	-	
$V(s)$		↗	3π	↘	

- (2) $s=0$ のとき、長方形 $R_s : 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2$ となり、立体 K_s を表す式は、

$$1 \leq y^2 + z^2 \leq 4, 1 \leq x \leq 2$$

さて、立体 K_s を、平面 $y=k$ で切断したときの断面は、

$$1-k^2 \leq z^2 \leq 4-k^2, 1 \leq x \leq 2$$

ここで、断面の存在する k の範囲は、 $-2 \leq k \leq 2$ であるが、 xz 平面に関する対称性から、以下、 $0 \leq k \leq 2$ で考える。

- (i) $0 \leq k \leq 1$ のとき

$$\text{より、} \sqrt{1-k^2} \leq |z| \leq \sqrt{4-k^2}$$

と合わせると、断面は右図のようになる。

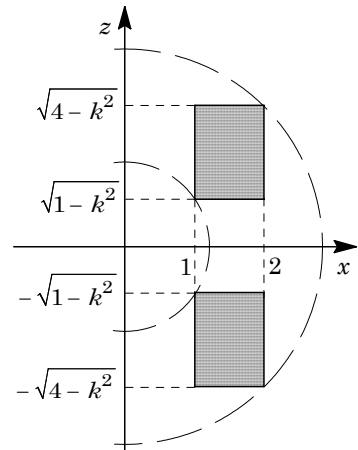
この断面を y 軸のまわりに 1 回転してできるドーナツ形の図形の外径を R 、内径を r とすると、

$$R^2 = 2^2 + (\sqrt{4-k^2})^2 = 8-k^2$$

$$r^2 = 1^2 + (\sqrt{1-k^2})^2 = 2-k^2$$

よって、このドーナツ形の面積 $S(k)$ は、

$$S(k) = \pi(R^2 - r^2) = 6\pi$$



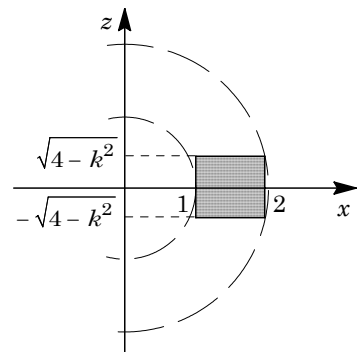
- (ii) $1 \leq k \leq 2$ のとき

$$1-k^2 \leq 0 \text{ より、} \text{から、} -\sqrt{4-k^2} \leq z \leq \sqrt{4-k^2}$$

と合わせると、断面は右図のようになる。

この断面を y 軸のまわりに 1 回転してできるドーナツ形の図形の外径を R 、内径を r とすると、

$$R^2 = 2^2 + (\sqrt{4-k^2})^2 = 8-k^2, r^2 = 1^2$$



よって、この図形の面積 $S(k)$ は、 $S(k) = \pi(R^2 - r^2) = \pi(7 - k^2)$

(i)(ii)より、立体 L の体積 V は、

$$\begin{aligned} V &= 2 \int_0^2 S(k) dk = 2 \int_0^1 6\pi dk + 2 \int_1^2 \pi(7 - k^2) dk = 12\pi + 2\pi \left[7k - \frac{k^3}{3} \right]_1^2 \\ &= 12\pi + \frac{28}{3}\pi = \frac{64}{3}\pi \end{aligned}$$

[解 説]

立体の回転体の体積を求める問題で、20年ほど前にはよく見かけました。回転軸に垂直に切った断面の形状を考えることがポイントです。なお、上の解答例で用いた円柱面の方程式については「ピンポイント レクチャー」を参照してください。

2

問題のページへ

- (1) 数字の組(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)が書かれた札を, それぞれ A, B, C, D とする。これらのいずれの札も, 取り出す確率は $\frac{1}{4}$ である。

まず, $A_0 = O$ は逆行列をもたない。また, A_1 は 1 つの成分のみが 1 であり, 他の 3 つの成分は 0 であるので, 逆行列をもたない。さて, A_2 が逆行列をもつのは, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ のときであり, これは A D, D A, B C, C B と取り出す 4 通りの場合がある。 A_0, A_1 が逆行列をもたず A_2 が逆行列をもつ確率 p_2 は,

$$p_2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times 4 = \frac{1}{4}$$

また, A_2 が逆行列をもたないのは,

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

このとき, A_3 が逆行列をもつのは, 最初に A を取り出したとき, A A D, A B C, A B D, A C B, A C D の 5 通りがあり, 最初が B, C, D のときも同様なので, A_0, A_1, A_2 が逆行列をもたず A_3 が逆行列をもつ確率 p_3 は,

$$p_3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times 5 \times 4 = \frac{5}{16}$$

- (2) $a > 0, b > 0$ として, $A_{n-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となるのは, A, B だけを $n-1$ 回取り出し, しかもどちらも少なくとも 1 回は取り出す場合であるので, その確率 q_{n-1} は,

$$q_{n-1} = (2^{n-1} - 2) \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 2 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

- (3) A_0, A_1, \dots, A_{n-1} が逆行列をもたず A_n が逆行列をもつのは, $a > 0, b > 0$ として,

(i) $A_{n-1} = \begin{pmatrix} n-1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & n-1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ n-1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & n-1 \end{pmatrix}$ のとき

n 回目に, 順に D, C, B, A を, それぞれ取り出す場合が対応する。

(ii) $A_{n-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ のとき

n 回目に, 順に C または D, A または B, B または D, A または C を, それぞれ取り出す場合が対応する。

- (i)(ii)より, A_0, A_1, \dots, A_{n-1} が逆行列をもたず A_n が逆行列をもつ確率 p_n は,

$$p_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \times \frac{1}{4} \times 4 + q_{n-1} \times \frac{2}{4} \times 4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - 3 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

[解 説]

行列と確率の融合という新鮮な題材です。プロセスは省略ぎみの解答例ですが。

3

問題のページへ

(1) $O(0, 0)$, $A(1, 0)$ に対し, $OP:AP=1:a$ を満たす点 $P(x, y)$ は, $AP=aOP$, $AP^2=a^2OP^2$ より,

$$(x-1)^2+y^2=a^2(x^2+y^2), (a^2-1)(x^2+y^2)+2x-1=0 \dots\dots$$

(i) $a=1$ のとき

より, $2x-1=0$ となり, 点 P の軌跡は, 直線 $x=\frac{1}{2}$ である。

(ii) $a \neq 1$ のとき

より, $x^2+y^2+\frac{2}{a^2-1}x-\frac{1}{a^2-1}=0$ となり, 点 P の軌跡は円であり,

$$\left(x+\frac{1}{a^2-1}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{(a^2-1)^2}$$

(2) $OP:AP=1:a$ を満たす点 P の軌跡は, (1)より, $a=1$ のとき直線 $x=\frac{1}{2}$, $a \neq 1$

のとき中心 $\left(-\frac{1}{a^2-1}, 0\right)$, 半径 $\frac{a}{|a^2-1|}$ の円である。

また, $O(0, 0)$, $B(0, 1)$ に対し, $OP:BP=1:b$ を満たす点 P の軌跡は, $b=1$ のとき直線 $y=\frac{1}{2}$, $b \neq 1$ のとき中心 $\left(0, -\frac{1}{b^2-1}\right)$, 半径 $\frac{b}{|b^2-1|}$ の円である。

よって, $OP:AP:BP=1:a:b$ を満たす点 P が存在するための条件は,

(i) $a=1$ かつ $b=1$ のとき

直線 $x=\frac{1}{2}$ と直線 $y=\frac{1}{2}$ を満たす点 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ が存在する。

(ii) $a=1$ かつ $b \neq 1$ のとき

直線 $x=\frac{1}{2}$ と中心 $\left(0, -\frac{1}{b^2-1}\right)$ で半径 $\frac{b}{|b^2-1|}$ の円を満たす点 P が存在するには,

$$\frac{b}{|b^2-1|} \geq \frac{1}{2}, |b^2-1| \geq 2b$$

$b > 0$ から, $-2b \leq b^2-1 \leq 2b$ となり, $b^2+2b-1 \geq 0$ かつ $b^2-2b-1 \geq 0$ より,
 $-1+\sqrt{2} \leq b \leq 1+\sqrt{2}$ ($b \neq 1$)

(iii) $a \neq 1$ かつ $b=1$ のとき

(ii)と同様にして, $-1+\sqrt{2} \leq a \leq 1+\sqrt{2}$ ($a \neq 1$)

(iv) $a \neq 1$ かつ $b \neq 1$ のとき

中心 $\left(-\frac{1}{a^2-1}, 0\right)$ で半径 $\frac{a}{|a^2-1|}$ の円と, 中心 $\left(0, -\frac{1}{b^2-1}\right)$ で半径 $\frac{b}{|b^2-1|}$ の円

を満たす点 P が存在するには,

$$\left|\frac{a}{|a^2-1|}-\frac{b}{|b^2-1|}\right| \leq \sqrt{\left(-\frac{1}{a^2-1}\right)^2+\left(-\frac{1}{b^2-1}\right)^2} \leq \frac{a}{|a^2-1|}+\frac{b}{|b^2-1|}$$

$$|a|b^2 - 1| - b|a^2 - 1| \leq \sqrt{(a^2 - 1)^2 + (b^2 - 1)^2} \leq |a|b^2 - 1| + b|a^2 - 1|$$

この不等式の各辺を 2 乗すると, 次の連立不等式に等しく,

$$\{|a|b^2 - 1| - b|a^2 - 1|\}^2 \leq (a^2 - 1)^2 + (b^2 - 1)^2 \dots\dots\dots$$

$$(a^2 - 1)^2 + (b^2 - 1)^2 \leq \{|a|b^2 - 1| + b|a^2 - 1|\}^2 \dots\dots\dots$$

$$\text{より, } (a^2 - 1)(b^2 - 1)^2 + (b^2 - 1)(a^2 - 1)^2 - 2ab|a^2 - 1||b^2 - 1| \leq 0 \dots\dots\dots$$

$$\text{より, } (a^2 - 1)(b^2 - 1)^2 + (b^2 - 1)(a^2 - 1)^2 + 2ab|a^2 - 1||b^2 - 1| \leq 0 \dots\dots\dots$$

(iv-i) ($a > 1$ かつ $b > 1$) または ($0 < a < 1$ かつ $0 < b < 1$) のとき

$$\text{より, } (b^2 - 1) + (a^2 - 1) - 2ab \leq 0 \text{ となり, } (a - b)^2 \geq 2, |a - b| \geq \sqrt{2}$$

$$\text{より, } (b^2 - 1) + (a^2 - 1) + 2ab \leq 0 \text{ となり, } (a + b)^2 \geq 2, a + b \geq \sqrt{2}$$

(iv-ii) ($a > 1$ かつ $0 < b < 1$) または ($0 < a < 1$ かつ $b > 1$) のとき

$$\text{より, } (b^2 - 1) + (a^2 - 1) + 2ab \leq 0 \text{ となり, } (a + b)^2 \geq 2, a + b \geq \sqrt{2}$$

$$\text{より, } (b^2 - 1) + (a^2 - 1) - 2ab \leq 0 \text{ となり, } (a - b)^2 \geq 2, |a - b| \geq \sqrt{2}$$

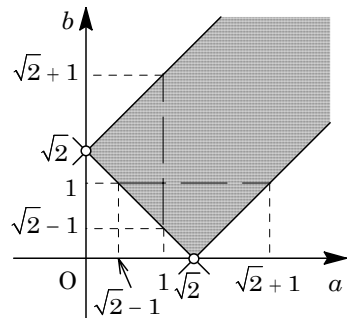
(iv-i) (iv-ii) より, $a \neq 1$ かつ $b \neq 1$ のとき,

$$|a - b| \geq \sqrt{2}, a + b \geq \sqrt{2}$$

(i) ~ (iv) をまとめると, 求める条件は,

$$a > 0, b > 0, |a - b| \geq \sqrt{2}, a + b \geq \sqrt{2}$$

これを ab 平面上に図示すると, 右図の網点部となる。ただし, 境界線は領域に含むが, 白丸は領域に含まない。



[解 説]

アポロニウスの円を題材として, さらに 2 円が共有点をもつ条件が味付けされています。文系の問題設定を一般化してあり, 計算に並々ならぬ注意力が必要です。

4

問題のページへ

(1) まず, 2 次方程式 $x^2 + ax + b = 0 \dots\dots$, $y^2 + by + a = 0 \dots\dots$ が, それぞれ整数解をもつとき, a, b が整数より, と の 2 つの解はともに整数である。

さて, $a = b > 0$ とするとき, は に一致し, 整数 k, l ($k \neq l$) を用いて, は,

$$(x+k)(x+l) = 0, \quad x^2 + (k+l)x + kl = 0 \dots\dots\dots$$

の係数を比べると, $k+l = a \dots\dots$, $kl = a \dots\dots$ となり, より,

$$kl = k+l, \quad (k-1)(l-1) = 1 \dots\dots\dots$$

ここで, から $a > 0$ に注意すると, k, l は自然数となり, $1 \leq k \leq l$ である。

すると, より, $(k-1, l-1) = (1, 1)$, $(k, l) = (2, 2)$

よって, $a = 4$ である。

(2) $a > b > 0$ とするとき, (1) と同様に, 整数 k, l ($k \neq l$) を用いて, は,

$$(x+k)(x+l) = 0, \quad x^2 + (k+l)x + kl = 0$$

よって, $k+l = a \dots\dots$, $kl = b \dots\dots$ となり, $a > b$ と から,

$$kl < k+l, \quad (k-1)(l-1) < 1 \dots\dots\dots$$

一方, $a > 0$, $b > 0$ から k, l は自然数となり, $1 \leq k \leq l$ であることから,

$$(k-1)(l-1) \geq 0 \dots\dots\dots$$

より, $(k-1)(l-1) = 0$ となり, $k = 1$ である。

すると, から $a = l+1$, から $b = l$ となり, 2 次方程式 は,

$$y^2 + ly + (l+1) = 0 \dots\dots\dots$$

ここで, (1) と同様に, 整数 m, n ($m \neq n$) を用いて, は,

$$(y+m)(y+n) = 0, \quad y^2 + (m+n)y + mn = 0 \dots\dots\dots$$

の係数を比べると, $m+n = l \dots\dots$, $mn = l+1 \dots\dots$ となり, より,

$$mn = m+n+1, \quad (m-1)(n-1) = 2 \dots\dots\dots$$

ここで, から $l > 0$ に注意すると, m, n は自然数となり, $1 \leq m \leq n$ である。

すると, より, $(m-1, n-1) = (1, 2)$, $(m, n) = (2, 3)$

よって, $l = 5$ から, $a = 6$, $b = 5$ である。

[解 説]

2 つの自然数の和と積の大小関係を, 和と積が等しいのは $2+2=2 \times 2$, 和が積より大きいのは $1+* > 1 \times *$ というイメージを用いて解いています。他の解法もいろいろ考えられそうな, 演習に価値ある整数問題です。