

1

問題のページへ

(1) 条件より, $\overrightarrow{AB} = (s, t-a)$, $|\overrightarrow{AB}| = r$ なので,

$$s^2 + (t-a)^2 = r^2 \dots\dots\dots$$

また, B(s, t) は双曲線 $x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上にあり,

$$s^2 - \frac{t^2}{b^2} = 1 \dots\dots\dots$$

さらに, B における接線の方程式は,

$$sx - \frac{ty}{b^2} = 1, sb^2x - ty = b^2$$

すると, 接線の法線ベクトル \vec{n} は, $\vec{n} = (sb^2, -t)$ となり, $\vec{n} \parallel \overrightarrow{AB}$ より,

$$sb^2(t-a) + ts = 0, (b^2+1)t = ab^2 \dots\dots\dots$$

より, $t = \frac{ab^2}{b^2+1}$ となり, に代入すると, $s > 0$ から,

$$s^2 = 1 + \frac{1}{b^2} \left(\frac{ab^2}{b^2+1} \right)^2 = \frac{b^4 + (a^2+2)b^2 + 1}{(b^2+1)^2}, s = \frac{\sqrt{b^4 + (a^2+2)b^2 + 1}}{b^2+1}$$

さらに, に代入すると,

$$r^2 = \frac{b^4 + (a^2+2)b^2 + 1}{(b^2+1)^2} + \left(\frac{ab^2}{b^2+1} - a \right)^2 = \frac{(b^2+1)(a^2+b^2+1)}{(b^2+1)^2} = \frac{a^2+b^2+1}{b^2+1}$$

$$r > 0 \text{ より, } r = \sqrt{\frac{a^2+b^2+1}{b^2+1}} \dots\dots\dots$$

(2) ABC が正三角形となる条件は, $r = 2s$ から $r^2 = 4s^2$ となり,

$$\frac{a^2+b^2+1}{b^2+1} = 4 \cdot \frac{b^4 + (a^2+2)b^2 + 1}{(b^2+1)^2}$$

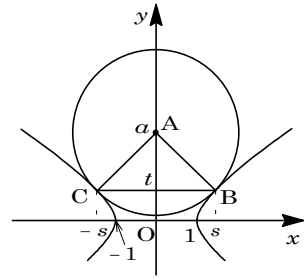
変形すると, $(b^2+1)\{a^2+(b^2+1)\} = 4\{(b^2+1)^2+a^2b^2\}$ から,

$$3(b^2+1)^2 + 3a^2b^2 - a^2 = 0, (3b^2-1)a^2 = -3(b^2+1)^2 \dots\dots\dots$$

を満たす $a^2 > 0$ が存在する b の条件は, $b > 0$ から,

$$3b^2 - 1 < 0, 0 < b < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

このとき, を満たす a が存在し, から r も存在する。



[解 説]

双曲線と円の位置関係に関する問題ですが, 計算量が半端ではありません。もっとも, これは2次曲線の問題の特徴でしょうが。

2

問題のページへ

$$(1) f(x) = \int_{-1}^x \sqrt{1-t^2} dt \dots\dots \text{より, } f'(x) = \sqrt{1-x^2}$$

また, $g(\theta) = f(\cos\theta) - f(\sin\theta) \dots\dots$ より,

$$\begin{aligned} g'(\theta) &= -f'(\cos\theta)\sin\theta - f'(\sin\theta)\cos\theta \\ &= -\sqrt{1-\cos^2\theta}\sin\theta - \sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta = -\sin\theta|\sin\theta| - \cos\theta|\cos\theta| \end{aligned}$$

$$(2) \text{より, } f(-1) = 0, f(0) = \frac{\pi}{4}, f(1) = \frac{\pi}{2} \text{となり, からの,}$$

$$g(0) = f(1) - f(0) = \frac{\pi}{4}, g\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(0) - f(1) = -\frac{\pi}{4}$$

$$g(\pi) = f(-1) - f(0) = -\frac{\pi}{4}, g\left(\frac{3\pi}{2}\right) = f(0) - f(-1) = \frac{\pi}{4}$$

$$(i) \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{のとき}$$

$$g'(\theta) = -\sin^2\theta - \cos^2\theta = -1, \quad g(\theta) = -\theta + C_1$$

$$\text{ここで, } g(0) = \frac{\pi}{4} \text{から } C_1 = \frac{\pi}{4} \text{となり, } g(\theta) = -\theta + \frac{\pi}{4}$$

$$(ii) \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \text{のとき}$$

$$g'(\theta) = -\sin^2\theta + \cos^2\theta = \cos 2\theta, \quad g(\theta) = \frac{1}{2}\sin 2\theta + C_2$$

$$\text{ここで, } g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{4} \text{から } C_2 = -\frac{\pi}{4} \text{となり, } g(\theta) = \frac{1}{2}\sin 2\theta - \frac{\pi}{4}$$

$$(iii) \quad \pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} \text{のとき}$$

$$g'(\theta) = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1, \quad g(\theta) = \theta + C_3$$

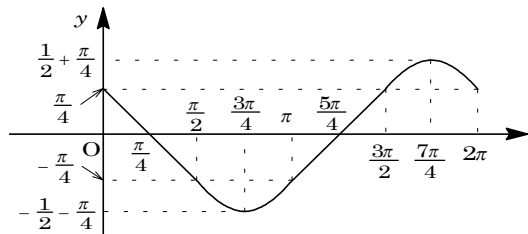
$$\text{ここで, } g(\pi) = -\frac{\pi}{4} \text{から } C_3 = -\frac{5\pi}{4} \text{となり, } g(\theta) = \theta - \frac{5\pi}{4}$$

$$(iv) \quad \frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi \text{のとき}$$

$$g'(\theta) = \sin^2\theta - \cos^2\theta = -\cos 2\theta, \quad g(\theta) = -\frac{1}{2}\sin 2\theta + C_4$$

$$\text{ここで, } g\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \text{から } C_4 = \frac{\pi}{4} \text{となり, } g(\theta) = -\frac{1}{2}\sin 2\theta + \frac{\pi}{4}$$

(3) (2)より, (i) ~ (iv)の場合をまとめると, $y = g(\theta)$ のグラフは右図のようになる。



[解 説]

合成関数の微分についての興味深い問題です。なお, (2)の $f(0)$, $f(1)$ の値は, 四分円, 半円の面積をもとに導いています。

3

問題のページへ

$$(1) \quad A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{より, } A^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \text{より, } \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \dots\dots \text{となり, また } c_1 = 0,$$

$c_{n+1} = c_n + \sqrt{a_n b_n} \dots\dots$ から,

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_2 = c_1 + \sqrt{a_1 b_1} = 0$$

$$\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c_3 = c_2 + \sqrt{a_2 b_2} = 0$$

$$\begin{pmatrix} a_4 \\ b_4 \end{pmatrix} = A^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_4 = c_3 + \sqrt{a_3 b_3} = \frac{1}{4}$$

よって, $P_2(0, \frac{1}{2}, 0)$, $P_3(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 0)$, $P_4(\frac{1}{8}, 0, \frac{1}{4})$

$$(3) \quad (1) \text{より, } 2A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2A)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2A)^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

これより, 帰納的に, n を 3 で割ったとき, 割り切れれば $(2A)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 余りが 1 では $(2A)^n = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, 余りが 2 では $(2A)^n = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ となる。

そこで, k を 0 以上の整数とすると, より,

(i) $n = 3k + 1$ のとき

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \sqrt{a_n b_n} = 0$$

(ii) $n = 3k + 2$ のとき

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \sqrt{a_n b_n} = 0$$

(iii) $n = 3k + 3$ のとき

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \sqrt{a_n b_n} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

さて, より, $c_1 = 0$ なので, $n \geq 2$ において,

$$c_n = c_1 + \sum_{l=1}^{n-1} \sqrt{a_l b_l} = \sum_{l=1}^{n-1} \sqrt{a_l b_l}$$

ここで, (i) ~ (iii) より, 数列 $\{\sqrt{a_n b_n}\}$ は,

$$0, 0, \frac{1}{2^2}, 0, 0, \frac{1}{2^5}, 0, 0, \frac{1}{2^8}, \dots\dots, 0, 0, \frac{1}{2^{3k-1}}, 0, 0, \frac{1}{2^{3k+2}}, \dots\dots$$

(i) $n = 3k + 1$ のとき

$$c_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^5} + \cdots + \frac{1}{2^{3k-1}} = \frac{\frac{1}{4} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{8} \right)^k \right\}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{2}{7} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{3k} \right\} = \frac{2}{7} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right\}$$

よって、 $P_n \left(\left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}, 0, \frac{2}{7} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right\} \right)$ である。(ii) $n = 3k + 2$ のとき

$$c_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^5} + \cdots + \frac{1}{2^{3k-1}} = \frac{2}{7} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{3k} \right\} = \frac{2}{7} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-2} \right\}$$

よって、 $P_n \left(0, \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}, \frac{2}{7} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-2} \right\} \right)$ である。(iii) $n = 3k + 3$ のとき

$$c_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^5} + \cdots + \frac{1}{2^{3k-1}} = \frac{2}{7} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{3k} \right\} = \frac{2}{7} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-3} \right\}$$

よって、 $P_n \left(-\left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}, -\left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}, \frac{2}{7} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-3} \right\} \right)$ である。

[解説]

(1)と(2)は基本的ですが、(3)では、 n を 3 で割った余りで場合分けをするために、難易度はかなり上昇します。具体的に考えながら、計算を進めた方がよいでしょう。

4a

問題のページへ

- (1) さいころを 2 回投げるとき、出る目と出る目の積の一の位の対応をまとめると、右表のようになる。これより、 $p_2(0) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ 、 $p_2(1) = \frac{1}{36}$ 、 $p_2(2) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ である。

1回 \ 2回	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	0	2
3	3	6	9	2	5	8
4	4	8	2	6	0	4
5	5	0	5	0	5	0
6	6	2	8	4	0	6

- (2) さいころを $n+1$ 回投げるとき、出る目の積の一の位が 1 となるのは、次の場合である。
 (i) n 回までの積の一の位が 1 で、 $n+1$ 回目
 が 1 のとき

(ii) n 回までの積の一の位が 7 で、 $n+1$ 回目が 3 のとき

(i)(ii)より、 $p_{n+1}(1) = \frac{1}{6} p_n(1) + \frac{1}{6} p_n(7) \dots\dots\dots$

- (3) $n+1$ 回投げるとき、出る目の積の一の位が 3 となるのは、 n 回までの積の一の位が 1 で $n+1$ 回目が 3、 n 回までの積の一の位が 3 で $n+1$ 回目が 1 のときであり、

$$p_{n+1}(3) = \frac{1}{6} p_n(1) + \frac{1}{6} p_n(3) \dots\dots\dots$$

$n+1$ 回投げるとき、出る目の積の一の位が 7 となるのは、 n 回までの積の一の位が 7 で $n+1$ 回目が 1、 n 回までの積の一の位が 9 で $n+1$ 回目が 3 のときであり、

$$p_{n+1}(7) = \frac{1}{6} p_n(7) + \frac{1}{6} p_n(9) \dots\dots\dots$$

$n+1$ 回投げるとき、出る目の積の一の位が 9 となるのは、 n 回までの積の一の位が 3 で $n+1$ 回目が 3、 n 回までの積の一の位が 9 で $n+1$ 回目が 1 のときであり、

$$p_{n+1}(9) = \frac{1}{6} p_n(3) + \frac{1}{6} p_n(9) \dots\dots\dots$$

+ + + より、

$$p_{n+1}(1) + p_{n+1}(3) + p_{n+1}(7) + p_{n+1}(9) = \frac{1}{3} \{ p_n(1) + p_n(3) + p_n(7) + p_n(9) \}$$

ここで、 $p_1(1) = p_1(3) = \frac{1}{6}$ 、 $p_1(7) = p_1(9) = 0$ より、

$$p_n(1) + p_n(3) + p_n(7) + p_n(9) = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + 0 + 0\right) \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

- (4) n 回投げるとき、出る目がすべて奇数となる確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ より、(3)から、

$$p_n(5) = \left(\frac{1}{2}\right)^n - \{ p_n(1) + p_n(3) + p_n(7) + p_n(9) \} = \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

[解 説]

(3)は(2)と同様に考えた解法です。また、(3)までは文理共通です。

4b

問題のページへ

$$(1) \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \text{ より, } xy - 4x - 8y = 0 \text{ となり,}$$

$$(x-8)(y-4) = 32$$

ここで, x, y は整数であり, $x-8 > -8, y-4 > -4$ から, 32 の約数を取り,

$$(x-8, y-4) = (1, 32), (2, 16), (4, 8), (8, 4), (16, 2), (32, 1)$$

$$(x, y) = (9, 36), (10, 20), (12, 12), (16, 8), (24, 6), (40, 5)$$

$$(2) \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p} \text{ より, } xy - px - 2py = 0 \text{ となり,}$$

$$(x-2p)(y-p) = 2p^2$$

ここで, $x-2p > -2p, y-p > -p$ であり, p が 3 以上の素数から,

$$(x-2p, y-p) = (1, 2p^2), (2, p^2), (p, 2p), (2p, p),$$

$$(p^2, 2), (2p^2, 1)$$

さて, $A = 2x + 3y - 7p = 2(x-2p) + 3(y-p)$ とおくと, A の値は順に,

$$A = 2 + 6p^2, 4 + 3p^2, 8p, 7p, 2p^2 + 6, 4p^2 + 3$$

ここで, $p \geq 3$ を用いると,

$$(2 + 6p^2) - (4 + 3p^2) = -2 + 3p^2 > 0, 2 + 6p^2 > 4 + 3p^2$$

$$8p - 7p = p > 0, 8p > 7p$$

$$(2p^2 + 6) - (4p^2 + 3) = -2p^2 + 3 < 0, 4p^2 + 3 > 2p^2 + 6$$

さらに, $(4 + 3p^2) - (2p^2 + 6) = p^2 - 2 > 0, 4 + 3p^2 > 2p^2 + 6 \dots\dots\dots$

$$(2p^2 + 6) - 7p = (2p-3)(p-2) > 0, 2p^2 + 6 > 7p \dots\dots\dots$$

より, A の最小値は $7p$ であり, このとき, $(x-2p, y-p) = (2p, p)$ となる。

すると, $2x + 3y = A + 7p$ から, $2x + 3y$ を最小にする (x, y) は,

$$(x-2p, y-p) = (2p, p), (x, y) = (4p, 2p)$$

[解 説]

有名な型の不定方程式です。なお, (2)の大小関係については, 初めはグラフということも考えましたが, 煩雑になりそうなので止めました。そこで, まず似た式どうしの大小を比べ, この予選を通過した式の大小を比べるという方法を探っています。