1

問題のページへ

(1)　$A=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$に対して，$A^2+2A+2E=O$ ………①

ここで，$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+2$ を $g(x)=x^2+2x+2$ で割ると，

$$f(x)=g(x)\{x^2+(a-2)x-2a+b+2\}+(2a-2b+c)x+4a-2b-2$$

これより，①を用いると，

$$A^4+aA^3+bA^2+cA+2E=(2a-2b+c)A+(4a-2b-2)E$$

すると，条件より，

$$(2a-2b+c)A+(4a-2b-2)E=O$$

ここで, A は E の実数倍ではないので,

$$2a-2b+c=0\ \cdots\cdots\text{②},\quad 4a-2b-2=0\ \cdots\cdots\text{③}$$

③より，$b=2a-1$ ………④

②に代入して，$c=-2a+2(2a-1)=2a-2$ ………⑤

(2)　④⑤を代入すると，

$$f(x)=g(x)\{x^2+(a-2)x-2a+2a-1+2\}=g(x)\{x^2+(a-2)x+1\}$$

すると，方程式 $f(x)=0$ は,

$$g(x)=0\ \cdots\cdots\text{⑥},\quad x^2+(a-2)x+1=0\ \cdots\cdots\text{⑦}$$

⑥の判別式 $D/4=1-2=-1$ から，$g(x)=0$ は実数解をもたない。

よって，方程式 $f(x)=0$ が少なくとも 1 つ正の解をもつことは，⑦が少なくとも 1 つ正の解をもつことに等しい。

そこで，$h(x)=x^2+(a-2)x+1$ とおくと，$h(0)=1>0$ より，

$$D=(a-2)^2-4\geqq 0\ \cdots\cdots\text{⑧},\quad -(a-2)>0\ \cdots\cdots\text{⑨}$$

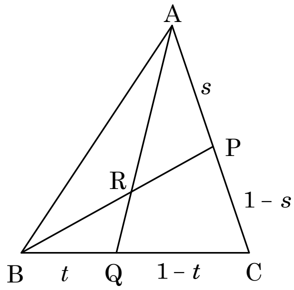
⑧⑨より，$a-2\leqq -2$ となり，求める a の範囲は，$a\leqq 0$ である。

[解 説]

行列の多項式の次数下げをするために，ハミルトン・ケーリーの定理と除法に関する等式を利用する頻出問題です。

2

問題のページへ



(1)　まず，AR : RQ $= k : 1-k$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}} = k\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = k(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + kt\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdots\cdots\cdots①$$

また，BR : RP $= l : 1-l$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}} = (1-l)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + l\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (1-l)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + ls\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdots\cdots\cdots②$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は 1 次独立なので，①②より，

$$k(1-t) = 1-l \cdots\cdots\cdots③,\quad kt = ls \cdots\cdots\cdots④$$

さらに，△APR = 2×△BQR より，

$$k(1-l) = 2l(1-k),\quad kl + k - 2l = 0 \cdots\cdots\cdots⑤$$

③より $l = 1-k+kt$ となり，④に代入すると，

$$kt = (1-k+kt)s,\quad k(s+t-st) = s$$

よって，$k = \dfrac{s}{s+t-st} \cdots\cdots$⑥となり，③から，

$$l = 1 - \frac{s}{s+t-st} + \frac{st}{s+t-st} = \frac{t}{s+t-st} \cdots\cdots\cdots⑦$$

⑥⑦を⑤に代入すると，

$$\frac{st}{(s+t-st)^2} + \frac{s}{s+t-st} - \frac{2t}{s+t-st} = 0,\quad st + (s-2t)(s+t-st) = 0$$

s についてまとめると，$(1-t)s^2 + 2t^2 s - 2t^2 = 0$ となるので，$s>0$ から，

$$s = \frac{-t^2 + \sqrt{t^4 + 2(1-t)t^2}}{1-t} = \frac{-t^2 + t\sqrt{t^2 - 2t + 2}}{1-t}$$

(2)　(1)より，$\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{s}{t} = \lim_{t\to+0}\frac{-t+\sqrt{t^2-2t+2}}{1-t} = \sqrt{2}$

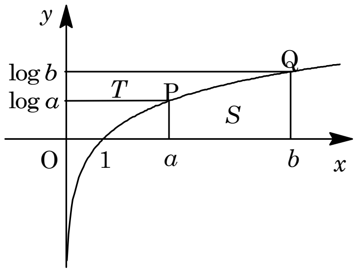
[解 説]

対頂角は等しいことから，三角形の面積比を，隣り合う 2 辺の長さの比の積として表しています。なお, (2)の計算には，唖然としてしまいます。

3

問題のページへ

$a \leqq x \leqq b$ において，曲線 $C: y=\log x$ と x 軸にはさまれた部分の面積 S は,



$$S=\int_a^b \log x\,dx=\left[\,x\log x-x\,\right]_a^b$$

$$=b\log b-a\log a-b+a$$

$\log a \leqq y \leqq \log b$ において，曲線 C と y 軸にはさまれた部分の面積 T は,

$$T=b\log b-a\log a-S=b-a$$

条件より，$S=T$ のとき，$b\log b-a\log a=2(b-a)$ となり,

$$\frac{b\log b-a\log a}{b-a}=2\cdots\cdots\cdots①$$

以下，①を満たす $b(>a)$ が存在する $a(>1)$ の範囲を求める。

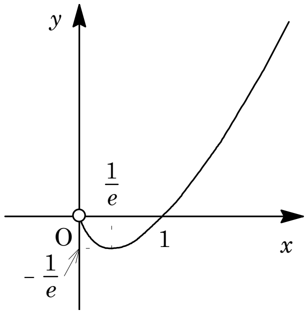
ここで，$f(x)=x\log x$ とおくと,

$$f'(x)=\log x+x\cdot\frac{1}{x}=\log x+1$$

$$f''(x)=\frac{1}{x}>0$$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$

$\lim\limits_{x\to+0} f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ より，$y=f(x)$ のグラフは下に凸で，右図のようになる。



さて，①から，$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=2\cdots\cdots\cdots②$

すると，②を満たす $b(>a)$ が存在する $a(>1)$ の条件は,

$f'(a)<\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ より,

$$\log a+1<2$$

よって，$1<a<e$ である。

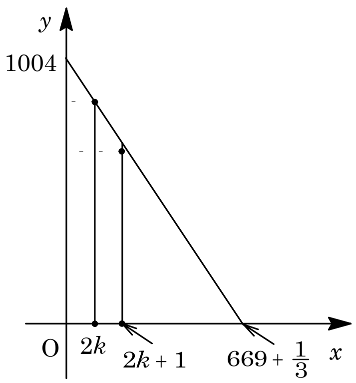
[解 説]

②式を，曲線の割線の傾きとしてとらえ，接線の傾きとの関係を図形的に処理しています。

$\boxed{\text{4a}}$

問題のページへ

(1)　$x \geqq 0$, $y \geqq 0$ で，不等式 $3x+2y \leqq 2008$ を満たす格子点の個数を, x を固定して数える。



(i)　$x=2k$ $(0 \leqq k \leqq 334)$ のとき

境界線 $3x+2y=2008$ との交点は,

$$y=\frac{1}{2}(2008-3\cdot 2k)=1004-3k$$

よって，直線 $x=2k$ 上で，$0 \leqq y \leqq 1004-3k$ より，格子点は $1005-3k$ 個ある。

(ii)　$x=2k+1$ $(0 \leqq k \leqq 334)$ のとき

境界線 $3x+2y=2008$ との交点は,

$$y=\frac{1}{2}\{2008-3(2k+1)\}=1004-3k-\frac{3}{2}$$

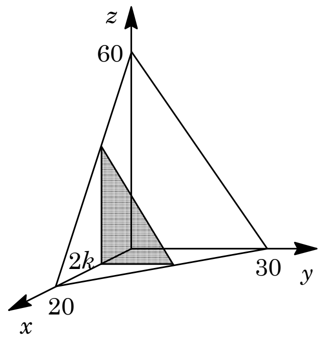
よって，直線 $x=2k+1$ 上で，$0 \leqq y \leqq 1004-3k-2=1002-3k$ より，格子点は $1003-3k$ 個ある。

(i)(ii)より，求める格子点の個数 N は,

$$N=\sum_{k=0}^{334}(1005-3k)+\sum_{k=0}^{334}(1003-3k)=\sum_{k=0}^{334}(2008-6k)$$

$$=2008\times 335-6\times\frac{1}{2}\cdot 334\cdot 335=337010$$

(2)　$x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$ で，不等式 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6} \leqq 10$ すなわち $3x+2y+z \leqq 60$ を満たす格子点の個数 N を，まず x を固定して数える。

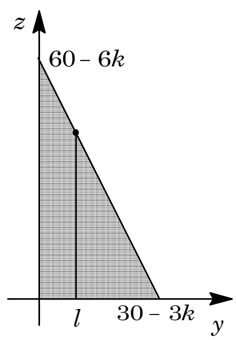


(i)　$x=2k$ $(0 \leqq k \leqq 10)$ のとき

平面 $x=2k$ 上の格子点の個数を N_{2k} とおくと，この平面上では,

$$0 \leqq z \leqq -2y+60-6k$$

(1)と同様に考えて，直線 $y=l$ $(0 \leqq l \leqq 30-3k)$ 上で，$0 \leqq z \leqq -2l+60-6k$ より，格子点は $-2l+61-6k$ 個あるので,



$$N_{2k}=\sum_{k=0}^{30-3k}(-2l+61-6k)$$

$$=-2\cdot\frac{1}{2}(30-3k)(31-3k)+(61-6k)(31-3k)$$

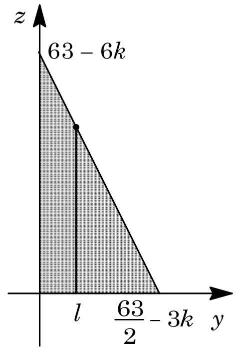
$$=(31-3k)^2$$

(ii)　$x=2k-1$ $(1 \leqq k \leqq 10)$ のとき

平面 $x=2k-1$ 上の格子点の個数を N_{2k-1} とおくと，この平面上では,

$$0 \leqq z \leqq -2y+60-3(2k-1) = -2y+63-6k$$

(1)と同様に考えて，直線 $y=l$ $(0 \leqq l \leqq 31-3k)$ 上では，



$0 \leqq z \leqq -2l+63-6k$ より，格子点は $-2l+64-6k$ 個あるので，

$$N_{2k-1} = \sum_{k=0}^{31-3k}(-2l+64-6k)$$

$$= -2 \cdot \frac{1}{2}(31-3k)(32-3k) + (64-6k)(32-3k)$$

$$= (33-3k)(32-3k)$$

(i)(ii)より，求める格子点の個数 N は，

$$N = \sum_{k=0}^{10} N_{2k} + \sum_{k=1}^{10} N_{2k-1} = N_0 + \sum_{k=1}^{10}(N_{2k} + N_{2k-1})$$

$$= 31^2 + \sum_{k=1}^{10}\{(31-3k)^2 + (33-3k)(32-3k)\}$$

$$= 31^2 + \sum_{k=1}^{10}(2017 - 381k + 18k^2)$$

$$= 31 \times 31 + 2017 \times 10 - 381 \times \frac{1}{2} \times 10 \times 11 + 18 \times \frac{1}{6} \times 10 \times 11 \times 21$$

$$= 7106$$

[解 説]

格子点の個数を数える有名問題です。平面と空間の 2 題が出されましたが，どちらも，かなりの量の計算が要求されます。

4b

問題のページへ

(1)　赤玉 3 個，白玉 2 個が入っている袋 B から 2 個の玉を取り出すとき，${}_5C_2$ 通りが同様に確からしいとする。

すると，取り出された玉が，赤 0 個，白 2 個の確率は $\dfrac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\dfrac{1}{10}$，赤 1 個，白 1 個の確率は $\dfrac{{}_3C_1\times{}_2C_1}{{}_5C_2}=\dfrac{6}{10}$，赤 2 個，白 0 個の確率は $\dfrac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\dfrac{3}{10}$ となり，赤玉の個数の期待値は，

$$0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{6}{10}+2\times\frac{3}{10}=\frac{6}{5}$$

(2)　赤玉 4 個，白玉 4 個が入っている袋 A から 3 個の玉を取り出し，そのあと袋 B から 2 個の玉を取り出す。このとき，赤 3 個となる確率は，

(i)　袋 A から赤玉 3 個を取り出したとき

袋 B から白玉 2 個取り出すことより，$\dfrac{{}_4C_3}{{}_8C_3}\times\dfrac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\dfrac{1}{14}\times\dfrac{1}{10}=\dfrac{1}{140}$

(ii)　袋 A から赤玉 2 個，白玉 1 個を取り出したとき

袋 B から赤玉 1 個，白玉 1 個取り出すことより，

$$\frac{{}_4C_2\times{}_4C_1}{{}_8C_3}\times\frac{{}_3C_1\times{}_2C_1}{{}_5C_2}=\frac{6}{14}\times\frac{6}{10}=\frac{36}{140}$$

(iii) 袋 A から赤玉 1 個，白玉 2 個を取り出したとき

袋 B から赤玉 2 個取り出すことより，$\dfrac{{}_4C_1\times{}_4C_2}{{}_8C_3}\times\dfrac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\dfrac{6}{14}\times\dfrac{3}{10}=\dfrac{18}{140}$

(i)～(iii)より，$\dfrac{1}{140}+\dfrac{36}{140}+\dfrac{18}{140}=\dfrac{11}{28}$

(3)　最初に袋 A から取り出した玉の色で場合分けをする。

(i)　最初に袋 A から赤玉 3 個を取り出したとき

(a)　次も袋 A（赤 1 個，白 4 個）から 2 個取り出すとき，赤玉の個数の期待値は，

$$0\times\frac{{}_4C_2}{{}_5C_2}+1\times\frac{{}_1C_1\times{}_4C_1}{{}_5C_2}=0\times\frac{6}{10}+1\times\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

(b)　次に袋 B から 2 個取り出すとき，赤玉の個数の期待値は, (1)より $\dfrac{6}{5}$ である。

(a) (b)より，$\dfrac{2}{5}<\dfrac{6}{5}$ なので，次は袋 B から 2 個取り出すことを選択する。

このときの赤玉の個数の期待値は，

$$3\times\frac{1}{14}\times\frac{1}{10}+4\times\frac{1}{14}\times\frac{6}{10}+5\times\frac{1}{14}\times\frac{3}{10}=\frac{21}{70}$$

(ii)　最初に袋 A から赤玉 2 個，白玉 1 個を取り出したとき

(a)　次も袋 A（赤 2 個，白 3 個）から 2 個取り出すとき，赤玉の個数の期待値は，

$$0\times\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}+1\times\frac{{}_2C_1\times{}_3C_1}{{}_5C_2}+2\times\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=0\times\frac{3}{10}+1\times\frac{6}{10}+2\times\frac{1}{10}=\frac{11}{10}$$

(b)　次に袋 B から 2 個取り出すとき，赤玉の個数の期待値は, (1)より $\frac{6}{5}$ である。

(a) (b)より，$\frac{11}{10}<\frac{6}{5}$ なので，次は袋 B から 2 個取り出すことを選択する。

このときの赤玉の個数の期待値は,

$$2\times\frac{6}{14}\times\frac{1}{10}+3\times\frac{6}{14}\times\frac{6}{10}+4\times\frac{6}{14}\times\frac{3}{10}=\frac{96}{70}$$

(iii) 最初に袋 A から赤玉 1 個，白玉 2 個を取り出したとき

(a)　次も袋 A（赤 3 個，白 2 個）から 2 個取り出すとき，赤玉の個数の期待値は,

$$0\times\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}+1\times\frac{{}_3C_1\times{}_2C_1}{{}_5C_2}+2\times\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{6}{10}+2\times\frac{3}{10}=\frac{6}{5}$$

(b)　次に袋 B から 2 個取り出すとき，赤玉の個数の期待値は, (1)より $\frac{6}{5}$ である。

(a) (b)より，期待値はともに $\frac{6}{5}$ なので，次は袋 A から 2 個取り出しても，袋 B から 2 個取り出してもよい。袋 B から取り出すと，赤玉の個数の期待値は,

$$1\times\frac{6}{14}\times\frac{1}{10}+2\times\frac{6}{14}\times\frac{6}{10}+3\times\frac{6}{14}\times\frac{3}{10}=\frac{66}{70}$$

(iv) 最初に袋 A から白玉 3 個を取り出したとき

(a)　次も袋 A（赤 4 個，白 1 個）から 2 個取り出すとき，赤玉の個数の期待値は,

$$1\times\frac{{}_4C_1\times{}_1C_1}{{}_5C_2}+2\times\frac{{}_4C_2}{{}_5C_2}=1\times\frac{4}{10}+2\times\frac{6}{10}=\frac{8}{5}$$

(b)　次に袋 B から 2 個取り出すとき，赤玉の個数の期待値は, (1)より $\frac{6}{5}$ である。

(a) (b)より，$\frac{8}{5}>\frac{6}{5}$ なので，次は袋 A から 2 個取り出すことを選択する。

このときの赤玉の個数の期待値は,

$$1\times\frac{1}{14}\times\frac{4}{10}+2\times\frac{1}{14}\times\frac{6}{10}=\frac{8}{70}$$

(i)～(iv)より，最終的に取り出される赤玉の個数の期待値は,

$$\frac{21}{70}+\frac{96}{70}+\frac{66}{70}+\frac{8}{70}=\frac{191}{70}$$

[解 説]

期待値をもとに有利・不利を判断する問題です。文系と同じ内容ですが，玉の個数や取り出す個数が増加したため，記述量は 2 倍程度になりました。