1

問題のページへ

(1) $A^2=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & b(a+d) \\ 0 & d^2 \end{pmatrix}$となり，$A^2=E$より，

$$a^2=1,\ b(a+d)=0,\ d^2=1$$

よって，$(a,\ d)=\pm(1,\ 1)$のとき$b=0$，$(a,\ d)=\pm(1,\ -1)$のとき b は任意より，

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$（b は任意の実数）

(2) $A^3=\begin{pmatrix} a^2 & b(a+d) \\ 0 & d^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^3 & b(a^2+ad+d^2) \\ 0 & d^3 \end{pmatrix}$となり，$A^3=E$より，

$$a^3=1,\ b(a^2+ad+d^2)=0,\ d^3=1$$

よって，$(a,\ d)=(1,\ 1)$から$b=0$となり，$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$である。

(3) $A^4=\begin{pmatrix} a^3 & b(a^2+ad+d^2) \\ 0 & d^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^4 & b(a^3+a^2d+ad^2+d^3) \\ 0 & d^4 \end{pmatrix}$

さて，$A^4=E$より，

$$a^4=1,\ b(a^3+a^2d+ad^2+d^3)=0,\ d^4=1$$

すると，$(a^2,\ d^2)=(1,\ 1)$から$b(a+d+a+d)=0$となり，$b(a+d)=0$

よって，$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E$となる。

[解 説]

ハミルトン・ケーリーの定理の利用も考えられますが，三角行列の累乗は複雑な形にならないという記憶があれば，上記の成分計算が最も簡明でしょう。

2

問題のページへ

(1)　$f(x)=2x^3-3x^2+1$ より，

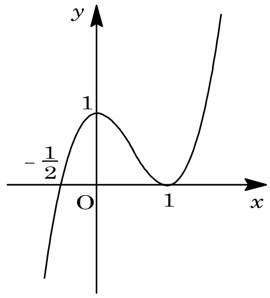
$$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$$

すると，$f(x)$ の値の変化は右表のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$

また，$f(x)=(2x+1)(x-1)^2$ から，$y=f(x)$ のグラフと x 軸との共有点は，$x=-\dfrac{1}{2}$，1 である。

よって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。



(2)　(1)より，方程式 $f(x)=a$ は, $0<a<1$ のとき 3 つの実数解 $\alpha<\beta<\gamma$ をもち，

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{3}{2}\cdots\cdots\cdots①,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$\alpha+\gamma=\dfrac{3}{2}-\beta$

②に代入して，$\alpha\gamma=-\beta(\alpha+\gamma)=-\beta\left(\dfrac{3}{2}-\beta\right)$

さて，$l=\gamma-\alpha$ より，

$$l^2=(\gamma-\alpha)^2=(\alpha+\gamma)^2-4\alpha\gamma=\left(\frac{3}{2}-\beta\right)^2+4\beta\left(\frac{3}{2}-\beta\right)=-3\beta^2+3\beta+\frac{9}{4}$$

よって，$l=\sqrt{-3\beta^2+3\beta+\dfrac{9}{4}}$

(3)　(2)より，$l=\sqrt{-3\left(\beta-\dfrac{1}{2}\right)^2+3}$ となり, $0<\beta<1$ から，

$$\frac{3}{2}<l\leqq\sqrt{3}$$

[解 説]

解 α，γ と β の関係をとらえるために, 解と係数の関係に着目することがポイントとなっています。見かけよりスパイスの効いている 1 題です。

$\boxed{3}$

問題のページへ

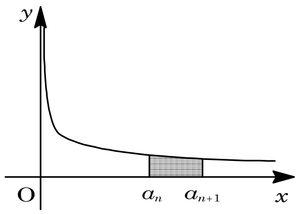
まず，$\displaystyle\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\int_{a_n}^{a_{n+1}}x^{-\frac{1}{3}}dx=\frac{3}{2}\Big[x^{\frac{2}{3}}\Big]_{a_n}^{a_{n+1}}=\frac{3}{2}\Big(a_{n+1}{}^{\frac{2}{3}}-a_n{}^{\frac{2}{3}}\Big)$なので，条件より，

$$\frac{3}{2}\Big(a_{n+1}{}^{\frac{2}{3}}-a_n{}^{\frac{2}{3}}\Big)=1,\quad a_{n+1}{}^{\frac{2}{3}}-a_n{}^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}$$

すると，$a_1=1$から，$a_n{}^{\frac{2}{3}}=a_1{}^{\frac{2}{3}}+\dfrac{2}{3}(n-1)=\dfrac{1}{3}(2n+1)$

よって，$a_n=\left\{\dfrac{1}{3}(2n+1)\right\}^{\frac{3}{2}}$

さて，曲線$y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$と，x軸，2直線$x=a_n$，$x=a_{n+1}$で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積V_nは，



$$V_n=\pi\int_{a_n}^{a_{n+1}}\Big(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\Big)^2dx=\pi\int_{a_n}^{a_{n+1}}x^{-\frac{2}{3}}dx$$
$$=3\pi\Big[x^{\frac{1}{3}}\Big]_{a_n}^{a_{n+1}}=3\pi\Big(a_{n+1}{}^{\frac{1}{3}}-a_n{}^{\frac{1}{3}}\Big)$$

ここで，$a_n{}^{\frac{1}{3}}=\left[\left\{\dfrac{1}{3}(2n+1)\right\}^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}=\left\{\dfrac{1}{3}(2n+1)\right\}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\dfrac{1}{3}(2n+1)}$より，

$$V_n=3\pi\left\{\sqrt{\frac{1}{3}(2n+3)}-\sqrt{\frac{1}{3}(2n+1)}\right\}=\sqrt{3}\pi(\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n+1})$$

すると，$\sqrt{n}\,V_n=\sqrt{3}\pi\sqrt{n}(\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n+1})=\sqrt{3}\pi\cdot\dfrac{2\sqrt{n}}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n+1}}$から，

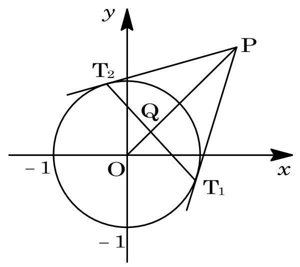
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,V_n=\sqrt{3}\pi\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2+\frac{3}{n}}+\sqrt{2+\frac{1}{n}}}=\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\pi=\frac{\sqrt{6}}{2}\pi$$

[解 説]

積分を計算して，数列$\left\{a_n{}^{\frac{2}{3}}\right\}$が等差数列であることを見抜けば，後半は計算練習にすぎません。

4a

問題のページへ



(1)　2 つの接点を $T_1(s_1,\ t_1)$，$T_2(s_2,\ t_2)$ とおくと，接線の方程式はそれぞれ，

$$s_1x + t_1y = 1,\quad s_2x + t_2y = 1$$

点 $P(x_0,\ y_0)$ を通ることより，

$$s_1x_0 + t_1y_0 = 1 \cdots\cdots ①,\quad s_2x_0 + t_2y_0 = 1 \cdots\cdots ②$$

ここで，方程式 $x_0x + y_0y = 1 \cdots\cdots$③は直線を表し，①から $T_1(s_1,\ t_1)$，②から $T_2(s_2,\ t_2)$ を通過することがわかる。すなわち，③は直線 T_1T_2 を表す。

さて，直線 T_1T_2 の法線ベクトルは，$\overrightarrow{OP} = (x_0,\ y_0)$ となり，2 直線 OP，T_1T_2 は直交する。言い換えると，2 点 T_1，T_2 の中点 Q は 2 直線 OP，T_1T_2 の交点である。

ここで，直線 OP は，k を実数として，

$$(x,\ y) = k(x_0,\ y_0),\quad y_0x - x_0y = 0 \cdots\cdots\cdots ④$$

③④より，$x = \dfrac{x_0}{{x_0}^2 + {y_0}^2}$，$y = \dfrac{y_0}{{x_0}^2 + {y_0}^2}$ となるので，$Q\left(\dfrac{x_0}{{x_0}^2 + {y_0}^2},\ \dfrac{y_0}{{x_0}^2 + {y_0}^2}\right)$

$$OP\cdot OQ = \sqrt{{x_0}^2 + {y_0}^2}\cdot\sqrt{\frac{{x_0}^2}{({x_0}^2 + {y_0}^2)^2} + \frac{{y_0}^2}{({x_0}^2 + {y_0}^2)^2}}$$

$$= \sqrt{{x_0}^2 + {y_0}^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{{x_0}^2 + {y_0}^2}} = 1$$

(2)　$Q(x_1,\ y_1)$ より，$x_1 = \dfrac{x_0}{{x_0}^2 + {y_0}^2}$，$y_1 = \dfrac{y_0}{{x_0}^2 + {y_0}^2} \cdots\cdots\cdots ⑤$

(1)から $OP\cdot OQ = 1$ なので，$({x_0}^2 + {y_0}^2)({x_1}^2 + {y_1}^2) = 1$ となり，⑤より，

$$x_0 = x_1({x_0}^2 + {y_0}^2) = \frac{x_1}{{x_1}^2 + {y_1}^2},\quad y_0 = y_1({x_0}^2 + {y_0}^2) = \frac{y_1}{{x_1}^2 + {y_1}^2} \cdots\cdots\cdots ⑥$$

さて，条件より，$x_0 + y_0 = 2$ なので，⑥より $\dfrac{x_1}{{x_1}^2 + {y_1}^2} + \dfrac{y_1}{{x_1}^2 + {y_1}^2} = 2$

$$2{x_1}^2 + 2{y_1}^2 - x_1 - y_1 = 0,\quad (x_1,\ y_1) \neq (0,\ 0)$$

すると，$\left(x_1 - \dfrac{1}{4}\right)^2 + \left(y_1 - \dfrac{1}{4}\right)^2 = \dfrac{1}{8}$ から，点 Q の軌跡は円 $\left(x - \dfrac{1}{4}\right)^2 + \left(y - \dfrac{1}{4}\right)^2 = \dfrac{1}{8}$ である。ただし，原点は除く。

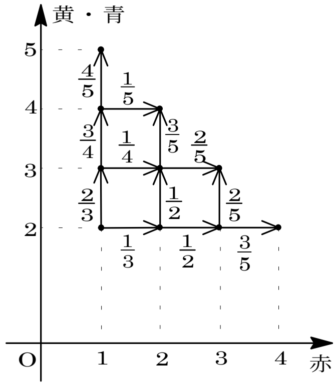
[解　説]

有名な頻出問題です。なお，点 Q が 2 直線 OP，T_1T_2 の交点であることは対称性から明らかですが，ここでは二等辺三角形の頂点から底辺に引いた垂線の足が，底辺の中点であることを用いています。

4b

問題のページへ

(1) 赤玉, 黄玉または青玉の個数を, (赤, 黄･青)の順に記し, 座標平面上の格子点を対応させると, 右図のようになり,



$$p_3(1)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{2}{5}$$

$$p_3(2)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{5}+\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$$

$$p_3(3)=\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$$

$$p_3(4)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{10}$$

したがって,

$$p_3(1):p_3(2):p_3(3):p_3(4)=4:3:2:1$$

(2) $p_N(1):p_N(2):\cdots:p_N(m):\cdots:p_N(N+1)=N+1:N:\cdots:N-m+2:\cdots:1$

と, (1)より推測できるので, $1\leqq m\leqq N+1$ のとき,

$$p_N(m)=\frac{N-m+2}{1+2+\cdots+(N+1)}=\frac{2(N-m+2)}{(N+1)(N+2)}$$

以下, この推測の正しいことを, 数学的帰納法を用いて証明する。

(i) $N=1$ のとき　$p_1(1)=\dfrac{2}{3}$, $p_1(2)=\dfrac{1}{3}$ より, 成立している。

(ii) $N=k$ のとき　$p_k(m)=\dfrac{2(k-m+2)}{(k+1)(k+2)}$　$(1\leqq m\leqq k+1)$ と仮定する。

$N=k+1$ のとき $m=1$ となるのは, (赤, 黄･青)$=(1,\ k+2)$ で黄または青を取り出す場合より,

$$p_{k+1}(1)=\frac{k+2}{k+3}p_k(1)=\frac{k+2}{k+3}\cdot\frac{2(k+1)}{(k+1)(k+2)}=\frac{2(k+2)}{(k+2)(k+3)}$$

$$=\frac{2\{(k+1)-1+2\}}{(k+2)(k+3)}$$

$N=k+1$ のとき $m=l$ $(2\leqq l\leqq k+1)$ となるのは, (赤, 黄･青)$=(l,\ k+3-l)$ で黄または青を取り出すか, (赤, 黄･青)$=(l-1,\ k+4-l)$ で赤を取り出す場合より,

$$p_{k+1}(l)=\frac{k+3-l}{k+3}p_k(l)+\frac{l-1}{k+3}p_k(l-1)$$

$$=\frac{k+3-l}{k+3}\cdot\frac{2(k-l+2)}{(k+1)(k+2)}+\frac{l-1}{k+3}\cdot\frac{2(k-l+3)}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{2(k-l+3)}{k+3}\cdot\frac{k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{2(k-l+3)}{(k+2)(k+3)}$$

$$=\frac{2\{(k+1)-l+2\}}{(k+2)(k+3)}$$

$N=k+1$ のとき $m=k+2$ となるのは, (赤, 黄･青)$=(k+1,\ 2)$ で赤を取り出す場

合より，

$$p_{k+1}(k+2)=\frac{k+1}{k+3}p_k(k+1)=\frac{k+1}{k+3}\cdot\frac{2}{(k+1)(k+2)}=\frac{2}{(k+2)(k+3)}$$

$$=\frac{2\{(k+1)-(k+2)+2\}}{(k+2)(k+3)}$$

以上より，$p_{k+1}(m)=\dfrac{2\{(k+1)-m+2\}}{(k+2)(k+3)}$　$(1\leqq m\leqq k+2)$ である。

(i)(ii)より，$p_N(m)=\dfrac{2(N-m+2)}{(N+1)(N+2)}$　$(1\leqq m\leqq N+1)$

[解 説]

文系の類題に，さらに一ひねりが加えられています。状態の推移を座標平面上の点を対応させて考え，(2)の証明も図を見ながら行いました。しかし，それでも注意力がかなり要求される難問です。