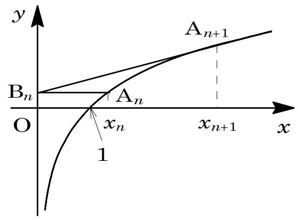
1

問題のページへ

(1)　$C: y=\log x$ より，$y'=\dfrac{1}{x}$ となり，接点を $(t,\ \log t)$ とおくと，接線の方程式は，

$$y-\log t=\frac{1}{t}(x-t),\quad y=\frac{1}{t}x-1+\log t$$



点 $(0,\ b)$ を通ることより，

$$-1+\log t=b,\quad t=e^{b+1}$$

よって，接線の方程式は，$y=e^{-b-1}x+b$

(2)　点 $A_n(x_n,\ \log x_n)$，$A_{n+1}(x_{n+1},\ \log x_{n+1})$ とおくと，$B_n(0,\ \log x_n)$ となり, (1)より，

$$x_{n+1}=e^{\log x_n+1},\quad x_{n+1}=ex_n$$

$A_1(1,\ 0)$ から $x_1=1$ なので，$x_n=1\cdot e^{n-1}=e^{n-1}$

よって，$A_n(e^{n-1},\ n-1)$，$A_{n+1}(e^n,\ n)$ となり，求める面積 S_n は,

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{2}e^n\{n-(n-1)\}-\left\{\int_{e^{n-1}}^{e^n}\log x\,dx-(e^n-e^{n-1})(n-1)\right\}\\&=\frac{1}{2}e^n+(n-1)e^n-(n-1)e^{n-1}-\Big[x\log x-x\Big]_{e^{n-1}}^{e^n}\\&=\frac{1}{2}e^n+(n-1)e^n-(n-1)e^{n-1}-ne^n+(n-1)e^{n-1}+e^n-e^{n-1}\\&=\frac{1}{2}e^n-e^{n-1}=\frac{1}{2}(e-2)e^{n-1}\end{aligned}$$

(3)　(2)より，$\dfrac{n}{S_n}=\dfrac{2n}{(e-2)e^{n-1}}=\dfrac{2}{e-2}\cdot n\left(\dfrac{1}{e}\right)^{n-1}$ となり，$T_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\left(\frac{1}{e}\right)^{k-1}$ とおくと，

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{e}\right)T_n&=1+\frac{1}{e}+\left(\frac{1}{e}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}-n\left(\frac{1}{e}\right)^n\\&=\frac{1-\left(\frac{1}{e}\right)^n}{1-\frac{1}{e}}-n\left(\frac{1}{e}\right)^n=\frac{e}{e-1}\left\{1-\left(\frac{1}{e}\right)^n\right\}-n\left(\frac{1}{e}\right)^n\end{aligned}$$

よって，$T_n=\dfrac{e^2}{(e-1)^2}\left\{1-\left(\dfrac{1}{e}\right)^n\right\}-\dfrac{e}{e-1}\cdot n\left(\dfrac{1}{e}\right)^n$ となり，条件より，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{e-2}T_n=\frac{2}{e-2}\cdot\frac{e^2}{(e-1)^2}=\frac{2e^2}{(e-2)(e-1)^2}$$

[解 説]

似た構図をよく見かける微積分の総合問題です。とにかく計算力がポイントです。

2

問題のページへ

(1)　$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$とおくと, $\begin{pmatrix}u_n\\ v_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}u_{n-1}\\ v_{n-1}\end{pmatrix}$より,

$$\begin{pmatrix}u_n\\ v_n\end{pmatrix}=A^{n-1}\begin{pmatrix}u_1\\ v_1\end{pmatrix}$$

ただし, $A^0=E$とする。

さて, 行列Aに対して, ハミルトン・ケーリーの定理を適用すると,

$$A^2+3E=O,\ A^2=-3E$$

これより, 帰納的に, k を正の整数として, $n=2k$ のとき $A^{2k}=(-3)^kE$, $n=2k-1$のとき$A^{2k-1}=(-3)^{k-1}A$となる。

(i)　$n=2k$のとき

$$\begin{pmatrix}u_n\\ v_n\end{pmatrix}=A^{2k-1}\begin{pmatrix}u_1\\ v_1\end{pmatrix}=(-3)^{k-1}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s\\ 1\end{pmatrix}=(-3)^{k-1}\begin{pmatrix}s-2\\ 2s-1\end{pmatrix}$$

sを消去すると, $2u_n-v_n=(-3)^{k-1}(2s-4-2s+1)$

$$2u_n-v_n=(-3)^k,\ 2u_n-v_n=(-3)^{\frac{n}{2}}$$

よって, $l_n:2x-y=(-3)^{\frac{n}{2}}$

(ii)　$n=2k-1$のとき

$$\begin{pmatrix}u_n\\ v_n\end{pmatrix}=A^{2(k-1)}\begin{pmatrix}u_1\\ v_1\end{pmatrix}=(-3)^{k-1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s\\ 1\end{pmatrix}=(-3)^{k-1}\begin{pmatrix}s\\ 1\end{pmatrix}$$

これより, u_nは任意で, $v_n=(-3)^{k-1}=(-3)^{\frac{n-1}{2}}$となる。

よって, $l_n:y=(-3)^{\frac{n-1}{2}}$

(2)　l_{2k-1}と y 軸との交点は$(0,\ (-3)^{k-1})$となり, この点と直線$l_{2k}:2x-y=(-3)^k$との距離は,

$$\frac{|-(-3)^{k-1}-(-3)^k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|(-3)^{k-1}(-1+3)|}{\sqrt{5}}=\frac{2\cdot 3^{k-1}}{\sqrt{5}}$$

よって, 求める円の方程式は,

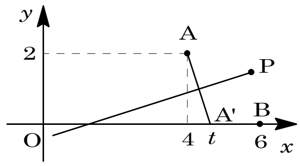
$$x^2+\{y-(-1)^{k-1}\}^2=\frac{4\cdot 9^{k-1}}{5}$$

[解 説]

n を偶奇に場合分けする点が面倒ですが, それさえ通過できれば, 基本的な問題です。

3

問題のページへ



(1)　ピッタリ直線 l は，線分 AA′ の垂直二等分線より，PA = PA′ となり，

$$(p-4)^2+(q-2)^2=(p-t)^2+q^2$$

$$-8p+16-4q+4=-2pt+t^2$$

まとめると，$t^2-2pt+8p+4q-20=0$ ………①

(2)　ピッタリ直線が 2 本存在するのは，点 A′$(t,\ 0)$ が 2 つ存在するときで，このとき①は $0\leqq t\leqq 6$ に異なる 2 つの実数解をもつ。

ここで，$f(t)=t^2-2pt+8p+4q-20=(t-p)^2-p^2+8p+4q-20$ とおくと，

$0<p<6$ ………②，$-p^2+8p+4q-20<0$ ………③

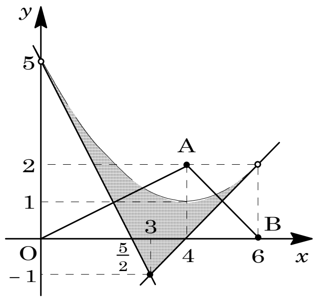
$f(0)=8p+4q-20\geqq 0$ ………④，$f(6)=-4p+4q+16\geqq 0$ ………⑤

③より，$4q<(p-4)^2+4$，$q<\dfrac{1}{4}(p-4)^2+1$ ………③′

④より $q\geqq -2p+5$ ………④′，⑤より $q\geqq p-4$ ………⑤′

さて，領域③′の境界線 $q=\dfrac{1}{4}(p-4)^2+1$ に対して，$q'=\dfrac{1}{2}(p-4)$ となる。

すると，$p=0$ のとき $q'=-2$，$p=6$ のとき $q'=1$ から，領域③′と領域④′の境界線，領域③′と領域⑤′の境界線はそれぞれ接する。



したがって，②③′④′⑤′より，点 P$(p,\ q)$ の存在範囲は，右図の網点部となる。ただし，実線の境界線は含み，破線の放物線上の境界線は含まない。

(3)　①の異なる 2 つの実数解を $t=t_1,\ t_2$ とおき，$A_1'(t_1,\ 0)$，$A_2'(t_2,\ 0)$ とする。

$$\overrightarrow{AA_1'}=(t_1-4,\ -2),\ \overrightarrow{AA_2'}=(t_2-4,\ -2)$$

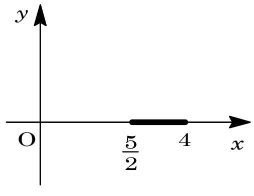
2 本のピッタリ直線が直交することより，$\overrightarrow{AA_1'}\cdot\overrightarrow{AA_2'}=0$ となり，

$(t_1-4)(t_2-4)+4=0$，$t_1t_2-4(t_1+t_2)+20=0$ ………⑥

ここで，①に対して，解と係数の関係を用いると，

$t_1+t_2=2p$，$t_1t_2=8p+4q-20$

⑥に代入して，$8p+4q-20-8p+20=0$



よって，$q=0$ となり，点 P$(p,\ q)$ は x 軸上に存在し，(2)の結論と合わせて図示すると，右図の太線部となる。

[解 説]

線対称を題材にした問題です。文系の類題に，ひとひねりが加えられています。

4　問題のページへ

(1)　まず，試行後の新しい底面の数字と，その数値になる確率を表にまとめる。

(i)　底面の数字が 1 または 6 のとき

新しい底面の数字は 2, 3, 4, 5 のいずれかとなる。

新しい底面	2	3	4	5
確　率	$\frac{2}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{5}{14}$

(ii)　底面の数字が 2 または 5 のとき

新しい底面の数字は 1, 3, 4, 6 のいずれかとなる。

新しい底面	1	3	4	6
確　率	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{6}{14}$

(iii)　底面の数字が 3 または 4 のとき

新しい底面の数字は 1, 2, 5, 6 のいずれかとなる。

新しい底面	1	2	5	6
確　率	$\frac{1}{14}$	$\frac{2}{14}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{6}{14}$

さて，底面の数字が 1 であるとき，試行を 1 回行うと，新しい底面の数字は 2, 3, 4, 5 のいずれかであるので，$q_1=p_1(1)+p_1(6)=0$ となり，また上表より，

$$r_1=p_1(2)+p_1(5)=\frac{2}{14}+\frac{5}{14}=\frac{1}{2},\ \ s_1=p_1(3)+p_1(4)=\frac{3}{14}+\frac{4}{14}=\frac{1}{2}$$

ここで，n 回の試行の後，底面の数字が 1 または 6 となるのは，$n-1$ 回の試行後，底面の数字が 1 または 6 でないときであり，さらに底面の数字が 2 または 5 のときも，3 または 4 のときも，n 回の試行後，底面の数字が 1 または 6 となる確率は，$\frac{1}{14}+\frac{6}{14}=\frac{1}{2}$ なので，

$$q_n=\frac{1}{2}(1-q_{n-1}),\ \ q_n-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(q_{n-1}-\frac{1}{3}\right)\ \ (n\geqq 2)$$

$q_1=0$ より，$q_n-\frac{1}{3}=\left(q_1-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ となり，

$$q_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\cdots\cdots\cdots①$$

①に $n=1$ をあてはめると $q_1=0$ となり，$n=1$ のときも満たしている。

次に，n 回の試行後，底面の数字が 2 または 5 となる確率は，$n-1$ 回の試行後，底面の数字が 1 または 6 のときも，3 または 4 のときも，ともに $\frac{2}{14}+\frac{5}{14}=\frac{1}{2}$ なので，

$$r_n=\frac{1}{2}(1-r_{n-1}),\ \ r_n-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(r_{n-1}-\frac{1}{3}\right)\ \ (n\geqq 2)$$

$r_1=\frac{1}{2}$ より，$r_n-\frac{1}{3}=\left(r_1-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ となり，

$$r_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}\cdots\cdots\cdots②$$

②に $n=1$ をあてはめると $r_1=\frac{1}{2}$ となり，$n=1$ のときも満たしている。

さらに，n 回の試行後，底面の数字が 3 または 4 となる確率は，$n-1$ 回の試行後，

底面の数字が 1 または 6 のときも, 2 または 5 のときも，$\frac{3}{14}+\frac{5}{14}=\frac{1}{2}$ なので,

$$s_n=\frac{1}{2}(1-s_{n-1}),\ \ s_n-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(s_{n-1}-\frac{1}{3}\right)\ \ (n\geqq 2)$$

$s_1=\frac{1}{2}$ より，$s_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$………③

③に $n=1$ をあてはめると $s_1=\frac{1}{2}$ となり，$n=1$ のときも満たしている。

(2) n 回の試行の後, 底面の数字が 1 となるのは，$n-1$ 回の試行後, 底面の数字が 1 または 6 でないときであり, さらに底面の数字が 2 または 5 のときも, 3 または 4 のときも, n 回の試行後, 底面の数字が 1 になる確率は $\frac{1}{14}$ なので,

$$p_n(1)=\frac{1}{14}(1-q_{n-1})\ \ (n\geqq 2)$$

すると, (1)より，$p_n(1)=\frac{1}{14}\cdot 2q_n=\frac{1}{21}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$………④

④に $n=1$ をあてはめると $p_1(1)=0$ となり，$n=1$ のときも満たしている。

$$p_n(6)=q_n-p_n(1)=\frac{2}{7}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

次に, n 回の試行後, 底面の数字が 2 となる確率は, 底面の数字が 1 または 6 のときも, 3 または 4 のときも，$\frac{2}{14}=\frac{1}{7}$ なので,

$$p_n(2)=\frac{1}{7}(1-r_{n-1})\ \ (n\geqq 2)$$

すると, (1)より，$p_n(2)=\frac{1}{7}\cdot 2r_n=\frac{2}{21}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$………⑤

⑤に $n=1$ をあてはめると $p_1(2)=\frac{1}{7}$ となり，$n=1$ のときも満たしている。

$$p_n(5)=r_n-p_n(2)=\frac{5}{21}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

さらに，n 回の試行後, 底面の数字が 3 となる確率は, 底面の数字が 1 または 6 のときも, 2 または 5 のときも，$\frac{3}{14}$ なので,

$$p_n(3)=\frac{3}{14}(1-s_{n-1})\ \ (n\geqq 2)$$

すると, (1)より，$p_n(3)=\frac{3}{14}\cdot 2r_n=\frac{1}{7}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$………⑥

⑥に $n=1$ をあてはめると $p_1(3)=\frac{3}{14}$ となり，$n=1$ のときも満たしている。

$$p_n(4)=s_n-p_n(3)=\frac{4}{21}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

[解 説]

文系の類題を量的に拡大した問題です。なお, 漸化式の威力が発揮されるこの手の問題は頻出で, 名大では 1995 年に類題が出ています。