1

問題のページへ

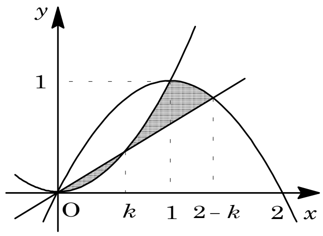
(1)　$D: y \geqq x^2$，$y \leqq kx$，$E: y \leqq x^2$，$y \geqq kx$，$F: y \leqq -x^2+2x$，$y \geqq kx$ より，これらの 3 つの領域の境界線は，$y = x^2$ ……①，$y = kx$ ……②，$y = -x^2+2x$ ……③である。

①と②の交点は，$x^2 = kx$ より，$x = 0,\ k$

①と③の交点は，$x^2 = -x^2+2x$ より，$x = 0,\ 1$

②と③の交点は，$kx = -x^2+2x$ より，

$x = 0,\ 2-k$



これより，領域 $D \cup (E \cap F)$ を図示すると，右図の網点部となり，その面積 $m(k)$ は，

$$m(k) = \int_0^{2-k}(-x^2+2x-kx)\,dx - \int_0^1(-x^2+2x-x^2)\,dx + 2\int_0^k(kx-x^2)\,dx$$

$$= -\int_0^{2-k}x(x-2+k)\,dx + 2\int_0^1 x(x-1)\,dx - 2\int_0^k x(x-k)\,dx$$

$$= \frac{1}{6}(2-k)^3 - 2\cdot\frac{1}{6}\cdot 1^3 + 2\cdot\frac{1}{6}k^3 = \frac{1}{6}(k^3+6k^2-12k+6)$$

$$= \frac{1}{6}k^3 + k^2 - 2k + 1$$

(2)　(1)より，$m'(k) = \frac{1}{2}k^2 + 2k - 2 = \frac{1}{2}(k^2+4k-4)$

$m'(k) = 0$ とすると，$k = -2 \pm 2\sqrt{2}$

$0 \leqq k \leqq 1$ より，$m(k)$ の値の変化は右表のようになり，$k = -2+2\sqrt{2}$ のとき最小となる。

k	0	$\cdots$	$-2+2\sqrt{2}$	$\cdots$	1
$m'(k)$		$-$	0	$+$	
$m(k)$		$\searrow$		$\nearrow$	

ここで，$k^3+6k^2-12k+6$ を k^2+4k-4 で割ると，

$$k^3+6k^2-12k+6 = (k^2+4k-4)(k+2) - 16k + 14$$

これより，最小値 $m(-2+2\sqrt{2})$ は，

$$m(-2+2\sqrt{2}) = \frac{1}{6}\left\{-16(-2+2\sqrt{2})+14\right\} = \frac{1}{3}(23-16\sqrt{2})$$

[解 説]

1999 年に続き，いわゆる $\frac{1}{6}$ 公式の適用パズルが出題されました。ただ，本年の問題は，ひねりが加わっています。

© 電送数学舎 2006

2

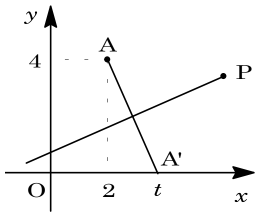
問題のページへ

(1)　ピッタリ直線 l は，線分 AA′ の垂直二等分線より，PA = PA′ となり，

$$(p-2)^2+(q-4)^2=(p-t)^2+q^2$$

$$-4p+4-8q+16=-2pt+t^2$$

まとめると，$t^2-2pt+4p+8q-20=0$ ………①

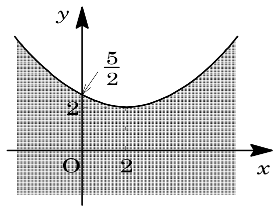


(2)　①が異なる 2 つの実数解をもつとき点 $A'(t,\ 0)$ は 2 つ存在し，このときピッタリ直線は 2 本存在することより，

$$D/4=p^2-(4p+8q-20)>0$$

$$8q<p^2-4p+20,\ q<\frac{1}{8}(p-2)^2+2$$

点 $P(p,\ q)$ の存在範囲は，右図の網点部となる。ただし，境界は含まない。



(3)　①の異なる 2 つの実数解を $t=t_1,\ t_2$ とおき，$A'_1(t_1,\ 0)$，$A'_2(t_2,\ 0)$ とする。

$$\overrightarrow{AA'_1}=(t_1-2,\ -4),\ \overrightarrow{AA'_2}=(t_2-2,\ -4)$$

2 本のピッタリ直線が直交することより，$\overrightarrow{AA'_1}\cdot\overrightarrow{AA'_2}=0$ となり，

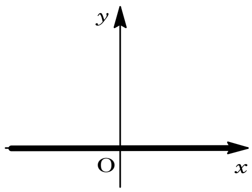
$$(t_1-2)(t_2-2)+16=0,\ t_1t_2-2(t_1+t_2)+20=0 \text{………②}$$

ここで，①に対して，解と係数の関係を用いると，

$$t_1+t_2=2p,\ t_1t_2=4p+8q-20$$

②に代入して，$4p+8q-20-4p+20=0$

よって，$q=0$ となり，点 $P(p,\ q)$ は x 軸上に存在する。図示すると，右図の太線部となる。



[解 説]

線対称を題材にした問題です。対称な 2 点を結ぶ線分の垂直二等分線が対称軸ということに注目するとクリアーです。

© 電送数学舎 2006

3

問題のページへ

(1)　まず, 試行後の新しい底面の数字と, その数値になる確率を表にまとめる。

(i)　底面の数字が 1 または 6 のとき

新しい底面の数字は 2, 3, 4, 5 のいずれかとなる。

新しい底面	2	3	4	5
確　率	$\frac{2}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{5}{14}$

(ii)　底面の数字が 2 または 5 のとき

新しい底面の数字は 1, 3, 4, 6 のいずれかとなる。

新しい底面	1	3	4	6
確　率	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{6}{14}$

(iii) 底面の数字が 3 または 4 のとき

新しい底面の数字は 1, 2, 5, 6 のいずれかとなる。

新しい底面	1	2	5	6
確　率	$\frac{1}{14}$	$\frac{2}{14}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{6}{14}$

さて, 底面の数字が 1 であるとき, 試行を 1 回行うと, 新しい底面の数字は 2, 3, 4, 5 のいずれかであるので,

$$q_1 = p_1(1) + p_1(6) = 0$$

次に, 試行を 2 回行ったとき, 底面が 1 となるのは, $1\to 2\to 1$, $1\to 3\to 1$, $1\to 4\to 1$, $1\to 5\to 1$ の場合, 底面が 6 となるのは, $1\to 2\to 6$, $1\to 3\to 6$, $1\to 4\to 6$, $1\to 5\to 6$ の場合で, それぞれの確率は,

$$p_2(1) = \frac{2}{14}\times\frac{1}{14} + \frac{3}{14}\times\frac{1}{14} + \frac{4}{14}\times\frac{1}{14} + \frac{5}{14}\times\frac{1}{14} = \frac{1}{14}$$

$$p_2(6) = \frac{2}{14}\times\frac{6}{14} + \frac{3}{14}\times\frac{6}{14} + \frac{4}{14}\times\frac{6}{14} + \frac{5}{14}\times\frac{6}{14} = \frac{6}{14}$$

よって, $q_2 = p_2(1) + p_2(6) = \frac{1}{14} + \frac{6}{14} = \frac{1}{2}$

(2)　n 回の試行の後, 底面の数字が 1 または 6 となるのは, $n-1$ 回の試行後, 底面の数字が 1 または 6 でないときである。

$n-1$ 回の試行後, 底面の数字が 2 または 5 のときも, 3 または 4 のときも, n 回の試行後, 底面の数字が 1 または 6 となる確率は, $\frac{1}{14} + \frac{6}{14} = \frac{1}{2}$ なので,

$$q_n = \frac{1}{2}(1 - q_{n-1}),\quad q_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(q_{n-1} - \frac{1}{3}\right)\quad (n \geqq 2)$$

$q_1 = 0$ より, $q_n - \frac{1}{3} = \left(q_1 - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ となり,

$$q_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\cdots\cdots\cdots(*)$$

(*)に $n=1$ をあてはめると $q_1 = 0$ となり, $n=1$ のときも満たしている。

(3)　n 回の試行の後, 底面の数字が 1 となるのは, $n-1$ 回の試行後, 底面の数字が 1 または 6 でないときである。$n-1$ 回の試行後, 底面の数字が 2 または 5 のときも, 3 または 4 のときも, n 回の試行後, 底面の数字が 1 になる確率は $\frac{1}{14}$ なので,

© 電送数学舎 2006

$$p_n(1)=\frac{1}{14}(1-q_{n-1})\quad(n\geqq 2)$$

すると, (2)より， $p_n(1)=\frac{1}{14}\cdot 2q_n=\frac{1}{21}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$………(∗∗)

(∗∗) に$n=1$をあてはめると$p_1(1)=0$となり，$n=1$のときも満たしている。

[解 説]

一見，難しそうな題意を把握するために，(1)では，考えた順にやや詳しく書きました。なお，漸化式の威力が発揮されるこの手の問題は頻出です。名大では 1995 年に類題が出ています。

© 電送数学舎 2006