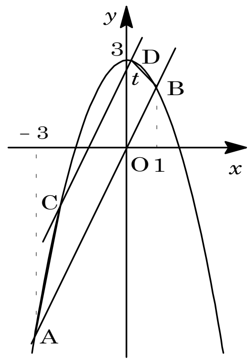
1

問題のページへ



(1)　$R: y=-x^2+3\cdots\cdots$①，$l: y=2x\cdots\cdots$②の交点は，

$$-x^2+3=2x,\ x^2+2x-3=0$$

よって，$x=-3,\ 1$となり，

$$T=\int_{-3}^{1}(-x^2+3-2x)\,dx=\int_{-3}^{1}-(x+3)(x-1)\,dx$$
$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)(1+3)^3=\frac{32}{3}$$

(2)　直線$y=2x+t\cdots\cdots$③と①が異なる2点で交わる条件は，

$$-x^2+3=2x+t,\ x^2+2x+t-3=0\cdots\cdots④$$

④の判別式$D/4=1-(t-3)>0$から，$0<t<4$となる。

このとき④の解は，$x=-1\pm\sqrt{4-t}$であり，これを$x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$とすると，$\mathrm{C}(\alpha,\ 2\alpha+t)$，$\mathrm{D}(\beta,\ 2\beta+t)$となることより，

$$\mathrm{CD}=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(2\beta+t-2\alpha-t)^2}=\sqrt{5}(\beta-\alpha)=2\sqrt{5}\cdot\sqrt{4-t}$$

また，$\mathrm{AB}=4\sqrt{5}$，原点と直線③の距離は，$\dfrac{|t|}{\sqrt{4+1}}=\dfrac{t}{\sqrt{5}}$となるので，

$$S=\frac{1}{2}(2\sqrt{5}\cdot\sqrt{4-t}+4\sqrt{5})\cdot\frac{t}{\sqrt{5}}=t(\sqrt{4-t}+2)$$

すると，$f(t)=\dfrac{S(t)}{T}=\dfrac{3}{32}t(\sqrt{4-t}+2)$

ここで，$s=\sqrt{4-t}$とおくと，$0<t<4$から$0<s<2$であり，

$$s^2=4-t,\ t=4-s^2$$

さらに，$f(t)=g(s)$とおくと，

$$g(s)=\frac{3}{32}(4-s^2)(s+2)=\frac{3}{32}(-s^3-2s^2+4s+8)$$
$$g'(s)=\frac{3}{32}(-3s^2-4s+4)$$
$$=-\frac{3}{32}(3s-2)(s+2)$$

s	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	2
$g'(s)$		$+$	0	$-$	
$g(s)$		$\nearrow$	$\frac{8}{9}$	$\searrow$	

右表より，$s=\dfrac{2}{3}$のとき，$g(s)=f(t)$は最大となり，最大値$\dfrac{8}{9}$をとる。

[解 説]

そのまま$f'(t)$の計算をして$f(t)$の増減を調べることも可能ですが，文系と同じく，置きかえをしました。

2

問題のページへ

(1) $z^5+2z^4+4z^3+8z^2+16z+32=0$ より，$(z+2)(z^4+4z^2+16)=0$ から，

$$(z+2)(z^4+8z^2+16-4z^2)=0,\ (z+2)(z^2+4+2z)(z^2+4-2z)=0$$

よって，$z=-2,\ -1\pm\sqrt{3}i,\ 1\pm\sqrt{3}i$

(2) (i) $z=-2$ のとき

このとき，$x^3+2=0$ となり，整数解は存在しない。

(ii) $z=-1+\sqrt{3}i$ のとき

$$x^3+3x+4=0,\ (x+1)(x^2-x+4)=0$$

よって，整数解 $x=-1$ をもつ。

(iii) $z=-1-\sqrt{3}i$ のとき

$$x^3-3x+4=0,\ x(3-x^2)=4\ \cdots\cdots\cdots①$$

これより，①が整数解をもつならば 4 の約数となり，整数解として $x=\pm1,\ \pm2$，±4 の場合を調べればよい。ここで，$f(x)=x^3-3x+4$ とおくと，

$$f(1)=2,\ f(-1)=6,\ f(2)=6,\ f(-2)=2,\ f(4)=56,\ f(-4)=-48$$

よって，$f(x)=0$ は整数解をもたない。

(iv) $z=1+\sqrt{3}i$ のとき

$$x^3+3x+2=0,\ x(-3-x^2)=2\ \cdots\cdots\cdots②$$

これより，②が整数解をもつならば 2 の約数となり，整数解として $x=\pm1,\ \pm2$ の場合を調べればよい。ここで，$g(x)=x^3+3x+2$ とおくと，

$$g(1)=6,\ g(-1)=-2,\ g(2)=16,\ g(-2)=-12$$

よって，$g(x)=0$ は整数解をもたない。

(v) $z=1-\sqrt{3}i$ のとき

$$x^3-3x+2=0,\ (x-1)^2(x+2)=0$$

よって，整数解 $x=1,\ -2$ をもつ。

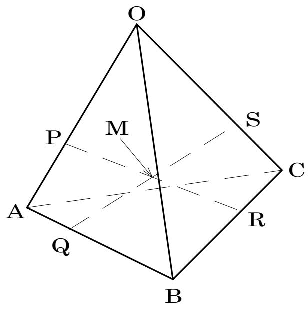
(i)～(v)より，求める z は，$z=-1+\sqrt{3}i,\ 1-\sqrt{3}i$

[解 説]

すべての場合をチェックするのは面倒ですが，しかし，それは時間の問題にすぎません。文系に類題が出ています。

3

問題のページへ



(1) t 秒後には，$\mathrm{OP} = \mathrm{BR} = t$ ，$\mathrm{AQ} = \mathrm{CS} = \frac{1}{2}t$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \left(1 - \frac{1}{2}t\right)\vec{a} + \frac{1}{2}t\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = (1-t)\vec{b} + t\vec{c},\quad \overrightarrow{\mathrm{OS}} = \left(1 - \frac{1}{2}t\right)\vec{c}$$

(2) QS と PR の交点が M なので，まず M は QS 上にあることより, k を定数として,

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = k\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + (1-k)\overrightarrow{\mathrm{OS}}$$
$$= k\left(1 - \frac{1}{2}t\right)\vec{a} + \frac{1}{2}kt\vec{b} + (1-k)\left(1 - \frac{1}{2}t\right)\vec{c}$$

また, M は PR 上にあることより, l を定数として,

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = l\overrightarrow{\mathrm{OP}} + (1-l)\overrightarrow{\mathrm{OR}} = lt\vec{a} + (1-l)(1-t)\vec{b} + (1-l)t\vec{c}$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立なので,

$$k\left(1 - \frac{1}{2}t\right) = lt \cdots\cdots\cdots①,\quad \frac{1}{2}kt = (1-l)(1-t) \cdots\cdots\cdots②$$

$$(1-k)\left(1 - \frac{1}{2}t\right) = (1-l)t \cdots\cdots\cdots③$$

①＋③から，$1 - \frac{1}{2}t = t$ より，$t = \frac{2}{3}$

①に代入して $k = l$，②に代入して $k + l = 1$ となるので，$k = l = \frac{1}{2}$ から,

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$$

[解 説]

よく見かける空間ベクトルの基本問題です。

$\boxed{4a}$ 問題のページへ

(1)　3 秒後に，$x=1$であるのは，$0\to1\to2\to1$，$0\to1\to0\to1$，$0\to-1\to0\to1$のいずれかの場合より，

$$p_3(1)=q\left(\frac{1}{2}\right)^2+q\cdot\frac{1}{2}q+(1-q)\cdot\frac{1}{2}q=\frac{3}{4}q$$

$x=-1$であるのは，$0\to1\to0\to-1$，$0\to-1\to0\to-1$，$0\to-1\to-2\to-1$のいずれかの場合より，

$$p_3(-1)=q\cdot\frac{1}{2}(1-q)+(1-q)\cdot\frac{1}{2}(1-q)+(1-q)\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}(1-q)$$

よって，$p_3(1)+p_3(-1)=\dfrac{3}{4}$

(2)　すべての自然数 n に対して，$p_n(m)+p_n(-m)$は q にはよらないことを数学的帰納法を用いて示す。なお，$m\geqq0$としても一般性を失うことはない。

(i)　$n=1$のとき

$m\neq1$のとき $p_1(m)+p_1(-m)=0$，$m=1$のとき $p_1(1)+p_1(-1)=1$となり，ともにqにはよらない。

(ii)　$n=k$のとき

$p_k(m)+p_k(-m)$はqにはよらないと仮定する。

$m\neq1$のとき，$p_{k+1}(m)=\dfrac{1}{2}p_k(m-1)+\dfrac{1}{2}p_k(m+1)$

$$p_{k+1}(-m)=\frac{1}{2}p_k(-m-1)+\frac{1}{2}p_k(-m+1)$$

よって，$p_{k+1}(m)+p_{k+1}(-m)$は，

$$\frac{1}{2}\{p_k(m-1)+p_k(-m+1)\}+\frac{1}{2}\{p_k(m+1)+p_k(-m-1)\}$$

すなわち，この値はqにはよらない。

$m=1$のとき，$p_{k+1}(1)=q\cdot p_k(0)+\dfrac{1}{2}p_k(2)$

$$p_{k+1}(-1)=\frac{1}{2}p_k(-2)+(1-q)p_k(0)$$

すると，$p_{k+1}(1)+p_{k+1}(-1)=p_k(0)+\dfrac{1}{2}\{p_k(2)+p_k(-2)\}$

$$=\frac{1}{2}\{p_k(0)+p_k(0)\}+\frac{1}{2}\{p_k(2)+p_k(-2)\}$$

よって，この値はqにはよらない。

(i)(ii)より，$p_n(m)+p_n(-m)$はqにはよらない。

(3)　条件から，$p_n(0)=\dfrac{1}{2}\{p_{n-1}(1)+p_{n-1}(-1)\}$

すると，(2)より$p_n(0)$は q にはよらないので，$q=\dfrac{1}{2}$として計算しても構わない。以下, nを偶奇に場合分けをして，$p_n(0)$を求める。

(i)　n が偶数のとき

$x=0$ となるのは, 1 だけ増加するのが $\dfrac{n}{2}$ 回, 1 だけ減少するのが $\dfrac{n}{2}$ 回より,

$$p_n(0)={}_n\mathrm{C}_{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}={}_n\mathrm{C}_{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

(ii)　n が奇数のとき

$x=0$ となる場合はないので, $p_n(0)=0$

[解　説]

(2)から(3)への連結がポイントです。(2)の結論から q は任意の値を設定してよいので, 当然, $q=\dfrac{1}{2}$ とするわけです。

$\boxed{4b}$ 問題のページへ

(1)　$I=\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(x)\,dx$ とし，$t=\pi-x$ とおくと，$dt=-dx$ から，

$$I=\int_{\pi}^{0}\left(\pi-t-\frac{\pi}{2}\right)f(\pi-t)(-dt)=-\int_0^{\pi}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)f(\pi-t)\,dt$$

ここで，$f(\pi-x)=f(x)$ から，$I=-\int_0^{\pi}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)f(t)\,dt=-I$ となり，

$$I=\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(x)\,dx=0$$

(2)　$f(x)=\dfrac{\sin^3 x}{4-\cos^2 x}$ とおくと，

$$f(\pi-x)=\frac{\sin^3(\pi-x)}{4-\cos^2(\pi-x)}=\frac{\sin^3 x}{4-\cos^2 x}=f(x)$$

すると, (1)より，$\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(x)\,dx=0$ となり，$J=\int_0^{\pi}\dfrac{x\sin^3 x}{4-\cos^2 x}dx$ とおくと，

$$J=\int_0^{\pi}xf(x)\,dx=\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)f(x)\,dx=\int_0^{\pi}\frac{\pi}{2}f(x)\,dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin^3 x}{4-\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos^2 x}{4-\cos^2 x}\cdot\sin x\,dx$$

さらに，$\cos x=u$ とおくと，$-\sin x\,dx=du$ から，

$$J=\frac{\pi}{2}\int_1^{-1}\frac{1-u^2}{4-u^2}(-du)=\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1-u^2}{4-u^2}du=\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\left(1-\frac{3}{4-u^2}\right)du$$

$$=\frac{\pi}{2}\left\{\Big[\,u\,\Big]_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}\frac{3}{(u+2)(u-2)}du\right\}=\frac{\pi}{2}\left\{2+\frac{3}{4}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{u-2}-\frac{1}{u+2}\right)du\right\}$$

$$=\pi\left\{1+\frac{3}{8}\left[\log\left|\frac{u-2}{u+2}\right|\right]_{-1}^{1}\right\}=\pi\left\{1+\frac{3}{8}\left(\log\frac{1}{3}-\log 3\right)\right\}=\pi\left(1-\frac{3}{4}\log 3\right)$$

[解 説]

置換積分の計算問題です。(1)のわかりやすい誘導があるために，方針に混乱は生じません。