1

解答解説のページへ

放物線 $R : y = -x^2 + 3$ と直線 $l : y = 2x$ との交点を A, B とする。直線 $y = 2x + t$ $(t>0)$ は放物線 R と相異なる 2 点 $\mathrm{C}(t)$, $\mathrm{D}(t)$ で交わるものとする。

(1) 放物線 R と直線 l とで囲まれた図形の面積 T を求めよ。

(2) 4 つの点 A, B, $\mathrm{C}(t)$, $\mathrm{D}(t)$ を頂点とする台形の面積を $S(t)$ とし，$f(t) = \dfrac{S(t)}{T}$ とおく。$f(t)$ の最大値を求めよ。

$\boxed{2}$　　解答解説のページへ

(1)　複素数 z を未知数とする方程式 $z^5+2z^4+4z^3+8z^2+16z+32=0$ の解をすべて求めよ。

(2)　(1)で求めた解 $z=p+qi$（p，q は実数）のうち，次の条件を満たすものをすべて求めよ。

条件：x を未知数とする 3 次方程式 $x^3+\sqrt{3}qx+q^2-p=0$ が，
整数の解を少なくとも 1 つもつ。

3

解答解説のページへ

1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC を考え，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。動点 P は O から A へ辺 OA 上を秒速 1 で，動点 Q は A から B へ辺 AB 上を秒速 $\dfrac{1}{2}$ で，動点 R は B から C へ辺 BC 上を秒速 1 で，動点 S は C から O へ辺 CO 上を秒速 $\dfrac{1}{2}$ で，同時に動き出す。

(1) 動き出してから t 秒後 $(0 \leqq t \leqq 1)$ のベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ および t を用いて表せ。

(2) 線分 PR と線分 QS が交点 M をもつときの $t\,(0 \leqq t \leqq 1)$ の値を求め，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

4a　解答解説のページへ

整数に値をとる変数 x の値が，次の規則で変化する。

(i)　ある時刻で $x=m$ $(m\neq 0)$ のとき，1 秒後に $x=m+1$，$x=m-1$ である確率はともに $\frac{1}{2}$ である。

(ii)　ある時刻で $x=0$ のとき，1 秒後に $x=1$ である確率は q，$x=-1$ である確率は $1-q$ である $(0\leqq q\leqq 1)$。$x=0$ から始めて，n 秒後 $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に $x=m$ である確率を $p_n(m)$ とする。

(1)　$p_3(1)+p_3(-1)$ を求めよ。

(2)　すべての自然数 n に対して次が成り立つことを示せ。
どんな整数 m についても $p_n(m)+p_n(-m)$ は q によらない。

(3)　$p_n(0)$ を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4b}}$ 解答解説のページへ

(1) 連続関数 $f(x)$ が，すべての実数 x について $f(\pi - x) = f(x)$ を満たすとき，

$\displaystyle\int_0^{\pi}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)f(x)\,dx = 0$ が成り立つことを証明せよ。

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{4 - \cos^2 x}\,dx$ を求めよ。