1

問題のページへ

(1) サイコロを2回投げて8に進むとき, 1回目と2回目に出る数の組合せは,

$(2,\ 6),\ (3,\ 5),\ (4,\ 4),\ (5,\ 3),\ (6,\ 2)$

よって，$p_2=\dfrac{5}{6^2}=\dfrac{5}{36}$

(2) サイコロを1回投げて8に進む場合はないので，$p_1=0$である。

また, サイコロを2回投げてゴールに移動していないとき, その位置を k とすると $2\leqq k\leqq 7$ なので, 3回目に$8-k$の目が出ればゴールに移動する。その$8-k$の出る確率が$\dfrac{1}{6}$より,

$$p_3=(1-p_2)\times\frac{1}{6}=\frac{31}{36}\times\frac{1}{6}=\frac{31}{216}$$

(3) (2)と同様に考えて, サイコロを n 回$(n\geqq 2)$投げてゴールに移動していないとき, その位置を l とすると$2\leqq l\leqq 7$なので，$n+1$回目に$8-l$の目が出ればゴールに移動する。その$8-l$の出る確率が$\dfrac{1}{6}$より,

$$p_{n+1}=(1-p_2-\cdots-p_{n-1}-p_n)\times\frac{1}{6}$$

これより，$1-6p_{n+1}=p_2+\cdots+p_{n-1}+p_n\quad(n\geqq 2)$………①

$1-6p_n=p_2+\cdots+p_{n-1}\quad(n\geqq 3)$………②

①−②から，$p_n=-6p_{n+1}+6p_n$，$p_{n+1}=\dfrac{5}{6}p_n\quad(n\geqq 3)$

よって，$p_n=p_3\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-3}=\dfrac{31}{216}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-3}$

[解 説]

サイコロを2回以上投げたとき, 0や1に移動している可能性はありません。つまり, あと1回投げてゴールに進むことができるわけです。この状況の把握がポイントです。文系では(3)がp_4になっています。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　$x+y-2z=3a$ ……①，$2x-y-z=3b$ ……②，$x-5y+4z=3c$ ……③に対して，

②より，$z=2x-y-3b$ ………④

④を①に代入して，$x+y-2(2x-y-3b)=3a$，$x-y=-a+2b$ ………⑤

④を③に代入して，$x-5y+4(2x-y-3b)=3c$，$x-y=\dfrac{4}{3}b+\dfrac{1}{3}c$ ………⑥

⑤⑥が解をもつ条件は,

$$-a+2b=\frac{4}{3}b+\frac{1}{3}c,\quad 3a-2b+c=0 \text{ ………⑦}$$

⑦が成り立つとき，⑤と⑥は一致し，t を実数として，

$$x=t,\quad y=t+a-2b$$

④より，$z=2t-(t+a-2b)-3b=t-a-b$

よって，$(x,\ y,\ z)=(t,\ t+a-2b,\ t-a-b)$ ………⑧

(2)　⑧を $x^2+y^2+z^2=1$ に代入すると，$t^2+(t+a-2b)^2+(t-a-b)^2-1=0$

$$3t^2-6bt+(2a^2-2ab+5b^2-1)=0 \text{ ………⑨}$$

t がただ 1 つ存在する条件は，$D/4=9b^2-3(2a^2-2ab+5b^2-1)=0$

$$2a^2-2ab+2b^2-1=0 \text{ ………⑩}$$

このとき，⑨の解は $t=b$ となるので，$(x,\ y,\ z)=(b,\ a-b,\ -a)$

すると，⑩より，$2x^2+2xy+2y^2=2b^2+2b(a-b)+2(a-b)^2$

$$=2a^2-2ab+2b^2=1$$

[解 説]

①，②，③を平面の方程式とみなし，その法線ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{n_1}$，$\overrightarrow{n_2}$，$\overrightarrow{n_3}$ とおくと，$\overrightarrow{n_3}=-3\overrightarrow{n_1}+2\overrightarrow{n_2}$ から，$\overrightarrow{n_1}$，$\overrightarrow{n_2}$，$\overrightarrow{n_3}$ が 1 次独立ではありません。この点が本問の背景となっています。

3　　　問題のページへ

(1)　$n \geqq 0$ のとき，$f_n(2\cos\theta) = 2\cos n\theta$ であることを数学的帰納法で証明する。

(i)　$n = 0,\ 1$ のとき

$f_0(2\cos\theta) = 2 = 2\cos(0\cdot\theta)$，$f_1(2\cos\theta) = 2\cos(1\cdot\theta)$ より成立する。

(ii)　$n = k,\ k+1$ のとき

$f_k(2\cos\theta) = 2\cos k\theta$，$f_{k+1}(2\cos\theta) = 2\cos(k+1)\theta$ と仮定すると，

$$\begin{aligned} f_{k+2}(2\cos\theta) &= 2\cos\theta\, f_{k+1}(2\cos\theta) - f_k(2\cos\theta) \\ &= 2\cos\theta\cdot 2\cos(k+1)\theta - 2\cos k\theta \\ &= 2\{\cos(k+2)\theta + \cos k\theta\} - 2\cos k\theta = 2\cos(k+2)\theta \end{aligned}$$

よって，$n = k+2$ のときも成立する。

(i)(ii)より，$f_n(2\cos\theta) = 2\cos n\theta \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$

(2)　$|x| \leqq 2$ より，$x = 2\cos\theta\ (0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とおくと，$f_n(x) = 0$ から，

$$2\cos n\theta = 0,\ n\theta = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k = 0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$$

よって，$\theta = \dfrac{1}{n}\left(k + \dfrac{1}{2}\right)\pi$ から，$x = 2\cos\dfrac{1}{n}\left(k + \dfrac{1}{2}\right)\pi$

x が最大になるのは，$k = 0$ のときで，最大値 x_n は $x_n = 2\cos\dfrac{\pi}{2n}$ となる。

このとき，$I_n = \displaystyle\int_{x_n}^{2} f_n(x)\,dx = \int_{2\cos\frac{\pi}{2n}}^{2} f_n(x)\,dx$ に対して，$x = 2\cos\theta$ とおくと，

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{\frac{\pi}{2n}}^{0} f_n(2\cos\theta)(-2\sin\theta)\,d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \cos n\theta \sin\theta\,d\theta \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \{\sin(n+1)\theta - \sin(n-1)\theta\}\,d\theta \\ &= 2\left[-\frac{\cos(n+1)\theta}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\theta}{n-1}\right]_0^{\frac{\pi}{2n}} \\ &= -\frac{2}{n+1}\cos\frac{n+1}{2n}\pi + \frac{2}{n-1}\cos\frac{n-1}{2n}\pi + \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n-1} \\ &= -\frac{2}{n+1}\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}\right) + \frac{2}{n-1}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}\right) - \frac{4}{(n+1)(n-1)} \\ &= \frac{2}{n+1}\sin\frac{\pi}{2n} + \frac{2}{n-1}\sin\frac{\pi}{2n} - \frac{4}{(n+1)(n-1)} \\ &= \frac{4n}{(n+1)(n-1)}\sin\frac{\pi}{2n} - \frac{4}{(n+1)(n-1)} \end{aligned}$$

(3)　(2)より，$n^2 I_n = \dfrac{4n^3}{(n+1)(n-1)}\sin\dfrac{\pi}{2n} - \dfrac{4n^2}{(n+1)(n-1)}$

$$= \frac{2\pi}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}} - \frac{4}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)}$$

$n\to\infty$のとき，$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\to 1$，$\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2n}}{\dfrac{\pi}{2n}}\to 1$より，

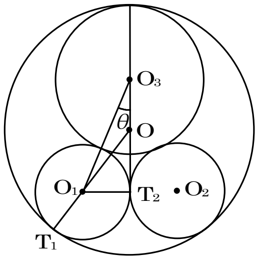
$$\lim_{n\to\infty} n^2\int_{x_n}^{2} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} n^2 I_n = 2\pi - 4$$

[解 説]

(2)において，θ の範囲を $0\leqq\theta\leqq\pi$ としても，一般性は失われません。ちょっとしたことですが，この後の論理がスムーズに進められます。

4a

問題のページへ



円 C_1，C_2，C_3，C の中心を，それぞれ O_1，O_2，O_3，O とおく。また，C_1 と C，C_1 と C_2 の接点を，それぞれ T_1，T_2 とおき，$\angle O_1O_3T_2 = \theta$ とすると，

$$OO_3 = 1-2a,\quad O_3O_1 = 2a + a = 3a,\quad OO_1 = 1-a$$

また，$\angle O_1T_2O_3 = 90°$ より $\sin\theta = \dfrac{O_1T_2}{O_1O_3} = \dfrac{a}{3a} = \dfrac{1}{3}$ となり，

$$\cos\theta = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

そこで，$\triangle O_3O_1O$ に余弦定理を適用すると，

$$(1-a)^2 = (3a)^2 + (1-2a)^2 - 2\cdot 3a(1-2a)\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$(6+4\sqrt{2})a^2 - (1+2\sqrt{2}) = 0$$

$a>0$ から，$a = \dfrac{1+2\sqrt{2}}{6+4\sqrt{2}} = \dfrac{1+2\sqrt{2}}{2(3+2\sqrt{2})} = \dfrac{4\sqrt{2}-5}{2}$

[解 説]

いろいろな解法が考えられますが，いずれにせよ，2 円が接するとき，中心間距離が半径の和や差に等しいことを利用します。

4b　　問題のページへ

まず，x_n と b が互いに素であることを，数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1$，2 のとき

$x_1=x_2=1$ より，x_1 と b，x_2 と b は互いに素である。

(ii)　$n=k$，$k+1$ のとき

x_k と b，x_{k+1} と b は互いに素であるとする。

ここで，x_{k+2} と b に 2 以上の公約数 g の存在を仮定すると，

$x_{k+2}=gx'_{k+2}$，$b=gb'$（x'_{k+2} と b' は整数）

すると，$x_{k+2}=ax_{k+1}+bx_k$ から，$ax_{k+1}=g(x'_{k+2}-b'x_k)$………①

これより，ax_{k+1} は g の倍数となるが，条件より a と b は互いに素，また x_{k+1} と b も互いに素なので，①の成立はありえない。

よって，x_{k+2} と b には 2 以上の公約数 g が存在せず，互いに素である。

(i)(ii)より，x_n と b は互いに素である。

次に，x_n と b が互いに素であることを利用して，x_{n+1} と x_n が互いに素であることを数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1$ のとき

$x_1=x_2=1$ より，x_2 と x_1 は互いに素である。

(ii)　$n=l$ のとき

x_{l+1} と x_l が互いに素であるとする。

ここで，x_{l+2} と x_{l+1} に 2 以上の公約数 G の存在を仮定すると，

$x_{l+2}=Gx''_{l+2}$，$x_{l+1}=Gx''_{l+1}$（x''_{l+2} と x''_{l+1} は整数）

すると，$x_{l+2}=ax_{l+1}+bx_l$ から，$bx_l=G(x''_{l+2}-ax''_{l+1})$………②

これより，bx_l は G の倍数となるが，b と x_{l+1} は互いに素，また x_l と x_{l+1} も互いに素なので，②の成立はありえない。

よって，x_{l+2} と x_{l+1} には 2 以上の公約数 G が存在せず，互いに素である。

(i)(ii)より，x_{n+1} と x_n は互いに素である。

[解 説]

漸化式 $x_{n+1}=ax_n+bx_{n-1}$ において，a と b が互いに素，しかも x_n と x_{n-1} も互いに素であるとき，x_{n+1} と x_n が互いに素でない例はすぐに見つけられます。たとえば，$33=7\times3+6\times2$ です。ということは，このような例を出現させないためには何を示せばよいのか……，と考えていきました。しかし，試験時間の 2 時間は，優に超えました。