

1

解答解説のページへ

サイコロの出た目の数だけ数直線を正の方向に移動するゲームを考える。ただし, 8 をゴールとしてちょうど 8 の位置へ移動したときにゲームを終了し, 8 をこえた分についてはその数だけ戻る。たとえば, 7 の位置で 3 が出た場合, 8 から 2 戻って 6 へ移動する。なお, サイコロは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。原点から始めて, サイコロを n 回投げ終えたときに 8 へ移動してゲームを終了する確率を p_n とおく。

- (1) p_2 を求めよ。
- (2) p_3 を求めよ。
- (3) 4 以上のすべての n に対して p_n を求めよ。

2

解答解説のページへ

a, b, c を実数とし, 実数の組 (x, y, z) に関する方程式

$$(i) \quad x + y - 2z = 3a, \quad 2x - y - z = 3b, \quad x - 5y + 4z = 3c$$

および

$$(ii) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

を考える。

- (1) 方程式(i)が解をもつための a, b, c に対する条件を求めよ。またそのときの方程式(i)の解 (x, y, z) を求めよ。
- (2) 方程式(i)と(ii)がただ 1 つの共通解をもつとき, その共通解 (x, y, z) は方程式 $2x^2 + 2xy + 2y^2 = 1$ を満たすことを示せ。

3

解答解説のページへ

多項式の列 $f_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ が, $f_0(x) = 2$, $f_1(x) = x$,

$$f_n(x) = xf_{n-1}(x) - f_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

を満たすとする。

- (1) $f_n(2 \cos \theta) = 2 \cos n\theta$, $n = 0, 1, 2, \dots$ であることを示せ。
 (2) $n \geq 2$ のとき, 方程式 $f_n(x) = 0$ の $|x| \leq 2$ における最大の実数解を x_n とおく。こ

のとき, $\int_{x_n}^2 f_n(x) dx$ の値を求めよ。

- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \int_{x_n}^2 f_n(x) dx$ の値を求めよ。

4a

解答解説のページへ

C_1, C_2, C_3 は、半径がそれぞれ $a, a, 2a$ の円とする。いま、半径 1 の円 C にこれらが内接していて、 C_1, C_2, C_3 は互いに外接しているとき、 a の値を求めよ。

4b

解答解説のページへ

正の整数 a と b が互いに素であるとき, 正の整数からなる数列 $\{x_n\}$ を $x_1 = x_2 = 1$, $x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1}$ ($n \geq 2$) で定める。このときすべての正の整数 n に対して x_{n+1} と x_n が互いに素であることを示せ。