1

問題のページへ

(1)　$x^2-px-q=0$ が実数解 α，β をもつので，$\alpha+\beta=p$，$\alpha\beta=-q$ となる。

このとき，$A=\begin{pmatrix} q & p \\ pq & p^2+q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\alpha\beta & \alpha+\beta \\ -\alpha^2\beta-\alpha\beta^2 & \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2 \end{pmatrix}$ とすると，

$(a_0,\ b_0)=(0,\ 0)$ より，$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha^2 \\ \alpha^3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha^2+1 \\ \alpha^3+\alpha \end{pmatrix}=(\alpha^2+1)\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix}=A(\alpha^2+1)\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}=(\alpha^2+1)\begin{pmatrix} \alpha^2 \\ \alpha^3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha^4+\alpha^2+1 \\ \alpha^5+\alpha^3+\alpha \end{pmatrix}$$

よって，$\mathrm{P}_2(\alpha^2+1,\ \alpha^3+\alpha)$，$\mathrm{P}_3(\alpha^4+\alpha^2+1,\ \alpha^5+\alpha^3+\alpha)$

(2)　$\mathrm{P}_n(a_n,\ b_n)$ とおくと，(1)より，$a_n=\alpha^{2(n-1)}+\alpha^{2(n-2)}+\cdots+\alpha^2+1$，$b_n=\alpha a_n$ と推測できるので，これを数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1$ のとき　$a_1=1$，$b_1=\alpha$ となり，成立する。

(ii)　$n=k$ のとき　$a_k=\alpha^{2(k-1)}+\alpha^{2(k-2)}+\cdots+\alpha^2+1$，$b_k=\alpha a_k$ と仮定する。

$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{pmatrix}=A\,a_k\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}=a_k\begin{pmatrix} \alpha^2 \\ \alpha^3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha^2 a_k+1 \\ \alpha^3 a_k+\alpha \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \alpha^{2k}+\alpha^{2(k-1)}+\cdots+\alpha^2+1 \\ \alpha(\alpha^{2k}+\alpha^{2(k-1)}+\cdots+\alpha^2+1) \end{pmatrix}$$

よって，$n=k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，$n\geqq 1$ で，$a_n=\alpha^{2(n-1)}+\alpha^{2(n-2)}+\cdots+\alpha^2+1$，$b_n=\alpha a_n$ となる。

以上より，$\alpha^2\neq 1$ のとき，$a_n=\dfrac{1-\alpha^{2n}}{1-\alpha^2}$ より $\mathrm{P}_n\left(\dfrac{1-\alpha^{2n}}{1-\alpha^2},\ \dfrac{\alpha(1-\alpha^{2n})}{1-\alpha^2}\right)$，$\alpha=1$ のとき，$a_n=n$ より $\mathrm{P}_n(n,\ n)$，$\alpha=-1$ のとき，$a_n=n$ より $\mathrm{P}_n(n,\ -n)$ となる。

なお，$n=0$ のときは，$\mathrm{P}_0(0,\ 0)$ である。

(3)　$n\to\infty$ のとき，$a_n=\alpha^{2(n-1)}+\alpha^{2(n-2)}+\cdots+\alpha^2+1$ が収束する条件は，$|\alpha^2|<1$ すなわち $-1<\alpha<1$ であり，このとき，

$$a=\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{1-\alpha^2},\quad b=\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\alpha a_n=\frac{\alpha}{1-\alpha^2}$$

よって，収束する点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ の座標は，$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{1-\alpha^2},\ \dfrac{\alpha}{1-\alpha^2}\right)$ である。

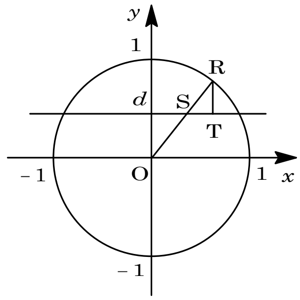
[解 説]

行列 A を α，β で表すと複雑ですが，点 P_1，P_2，P_3 と求めていけば，P_n が推測できるようになっています。

2

問題のページへ

点Rが$(0,\ 1)$のとき，$\mathrm{ST}=0$であり，y軸に関する対称性から，点Rが第1象限にあると考えても一般性を失わない。



さて，$t>0$として，$\mathrm{R}(t,\ \sqrt{1-t^2})$とおくと，$\mathrm{T}(t,\ d)$となり，

$$\sqrt{1-t^2}>d,\ 1-t^2>d^2,\ 0<t<\sqrt{1-d^2}$$

このとき，直線OR：$y=\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{t}x$と直線$l$：$y=d$の交点は，

$$\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}x=d,\ x=\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

よって，$\mathrm{S}\left(\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}},\ d\right)$となり，$\mathrm{ST}=t-\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$である。

ここで，$f(t)=t-\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$とおくと，

$$f'(t)=1-d\cdot\frac{1-t^2+t^2}{(1-t^2)\sqrt{1-t^2}}=\frac{(1-t^2)\sqrt{1-t^2}-d}{(1-t^2)\sqrt{1-t^2}}$$

$f'(t)=0$とすると，$(1-t^2)\sqrt{1-t^2}=d$，$(1-t^2)^3=d^2$より，

$$1-t^2=d^{\frac{2}{3}},\ t=\sqrt{1-d^{\frac{2}{3}}}$$

$0<d<1$なので，右の増減表より，$t=\sqrt{1-d^{\frac{2}{3}}}$のとき$f(t)=\mathrm{ST}$は最大となり，その最大値は，

t	0	$\cdots$	$\sqrt{1-d^{\frac{2}{3}}}$	$\cdots$	$\sqrt{1-d^2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$$\sqrt{1-d^{\frac{2}{3}}}-\frac{d\sqrt{1-d^{\frac{2}{3}}}}{d^{\frac{1}{3}}}=\sqrt{1-d^{\frac{2}{3}}}-d^{\frac{2}{3}}\sqrt{1-d^{\frac{2}{3}}}=(1-d^{\frac{2}{3}})\sqrt{1-d^{\frac{2}{3}}}$$

[解 説]

点Rのx座標を普通に設定しましたが，微分の計算は繁雑ではありませんでした。最初は，Rを媒介変数表示した方がよいのかどうかと迷っていたのですが。

3

問題のページへ

(1)　サイコロを 1 回投げて 3 の倍数が出る確率は$\dfrac{1}{3}$なので，n 回投げて 3 の倍数が k 回出る確率$P_n(k)$は，

$$P_n(k)={}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{2^{n-k}}{3^n}$$

よって，$\dfrac{P_n(k+1)}{P_n(k)}=\dfrac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}\cdot\dfrac{2^{n-k-1}}{3^n}\cdot\dfrac{k!(n-k)!}{n!}\cdot\dfrac{3^n}{2^{n-k}}=\dfrac{n-k}{2(k+1)}$

(2)　$\dfrac{P_n(k+1)}{P_n(k)}=\dfrac{n-k}{2(k+1)}>1$とすると，$n-k>2k+2$より，$k<\dfrac{n-2}{3}$

これより，$\dfrac{n-k}{2(k+1)}=1$とすると$k=\dfrac{n-2}{3}$，$\dfrac{n-k}{2(k+1)}<1$とすると$k>\dfrac{n-2}{3}$

(i)　$n-2$が 3 の倍数のとき

m を 0 以上の整数として，$n-2=3m$とすると，$k<m$ のとき$P_n(k)<P_n(k+1)$，$k=m$のとき$P_n(k)=P_n(k+1)$，$k>m$ のとき$P_n(k)>P_n(k+1)$となる。

よって，$k=m$，$m+1$のとき$P_n(k)$は最大となるので，

$$N(n)=m+1=\frac{n-2}{3}+1=\frac{n+1}{3},\quad \frac{N(n)}{n}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3n}>\frac{1}{3}$$

(ii)　$n-2$が 3 の倍数でないとき

m を 0 以上の整数として，$n-2=3m+1$または$n-2=3m+2$とすると，$k\leqq m$ のとき$P_n(k)<P_n(k+1)$，$k>m$ のとき$P_n(k)>P_n(k+1)$となる。

よって，いずれの場合も，$k=m+1$のとき$P_n(k)$は最大となるので，

$n-2=3m+1$のとき，$N(n)=m+1=\dfrac{n-3}{3}+1=\dfrac{n}{3}$，$\dfrac{N(n)}{n}=\dfrac{1}{3}$

$n-2=3m+2$のとき，$N(n)=m+1=\dfrac{n-4}{3}+1=\dfrac{n-1}{3}$，$\dfrac{N(n)}{n}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3n}<\dfrac{1}{3}$

(i)(ii)より，$\dfrac{N(n)}{n}$が最小になる場合は，$n-2=3m+2$の場合で n が最小のとき，すなわち$n=4$のときである。このとき，$\dfrac{N(n)}{n}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{4}$となる。

(3)　(2)より，$n-2=3m$のとき$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{N(n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3n}\right)=\frac{1}{3}$，$n-2=3m+1$のとき$\dfrac{N(n)}{n}=\dfrac{1}{3}$，$n-2=3m+2$のとき$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{N(n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3n}\right)=\frac{1}{3}$である。

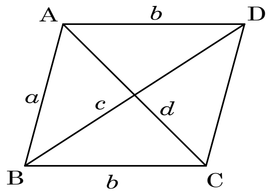
以上より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{N(n)}{n}=\frac{1}{3}$である。

[解 説]

確率の最大値についての頻出問題ですが，(2)の場合分けがちょっと面倒です。

4a

問題のページへ



(1)　$\angle \mathrm{BAD}=\theta$ とおくと，$\angle \mathrm{ABC}=180^\circ-\theta$ となり，$\triangle \mathrm{ABD}$，$\triangle \mathrm{ABC}$ にそれぞれ余弦定理を適用すると，

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta \cdots\cdots\cdots ①$$
$$d^2=a^2+b^2-2ab\cos(180^\circ-\theta)$$
$$=a^2+b^2+2ab\cos\theta \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より，$c^2+d^2=2a^2+2b^2$，$a^2+b^2=\dfrac{1}{2}(c^2+d^2)$

(2)　$0<a\leqq b\leqq c$ かつ $a^2+b^2>c^2$ より，3 辺の長さが a，b，c の三角形は鋭角三角形であるので，

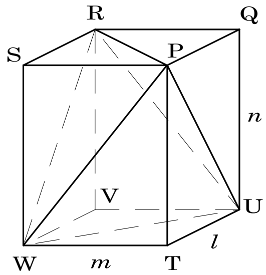
$$a^2+b^2>c^2,\ b^2+c^2>a^2,\ c^2+a^2>b^2 \cdots\cdots\cdots ③$$

③より, $l>0$, $m>0$, $n>0$ として，l^2，m^2，n^2 を次式で定義することができる。

$$l^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2),\ m^2=\frac{1}{2}(a^2-b^2+c^2),\ n^2=\frac{1}{2}(-a^2+b^2+c^2)$$

a^2，b^2，c^2 について解くと，$a^2=l^2+m^2$，$b^2=l^2+n^2$，$c^2=m^2+n^2$

$$a=\sqrt{l^2+m^2},\ b=\sqrt{l^2+n^2},\ c=\sqrt{m^2+n^2}$$



さて，直方体 PQRS-TUVW において，$\mathrm{PQ}=l$，$\mathrm{PS}=m$，$\mathrm{PT}=n$ とすると，

$$\mathrm{PR}=\mathrm{WU}=a,\ \mathrm{PU}=\mathrm{RW}=b,\ \mathrm{PW}=\mathrm{RU}=c$$

よって，各面の三角形の辺の長さを a，b，c とする四面体を作ることができる。

[解 説]

(2)の問題を見て「直方体に埋め込まれた等面四面体」ということに気持ちが集約してしまい，(1)の利用という考えは吹っ飛んでしまいました。なお，上の解は，1999 年の京大理系（後期）第 4 問の解を貼り付けたものです。図は作り直しましたが。

4b

問題のページへ

(1)　グラフより，$f(-x)=-f(x)$ なので，$-f'(-x)=-f'(x)$，$f'(-x)=f'(x)$

よって，$y=f'(x)$ のグラフは y 軸に関して対称となり，以下，$x \geqq 0$ で考える。

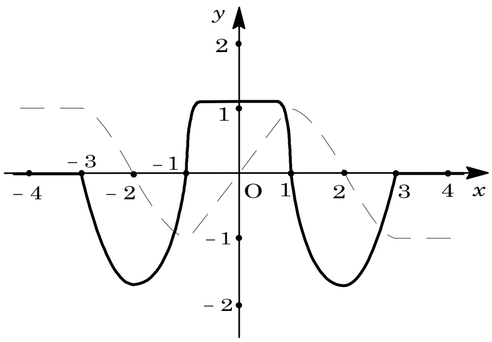
さて，$f'(x)$ は点 $(x,\ f(x))$ における $y=f(x)$ の接線の傾きを表すので，k を 1 より少し大きい値として，$0 \leqq x < 1$ のとき，$f'(x)=k$ となる。

$x=1$ のとき，$f'(1)=0$

$1 < x \leqq 2$ のとき $f'(x)$ の値は単調に減少し，$2 \leqq x < 3$ のとき $f'(x)$ の値は単調に増加する。

$x \geqq 3$ のとき，$f'(x)=0$

したがって，$y=f'(x)$ のグラフの概形は右図のようになる。



(2)　$f(-x)=-f(x)$ より，$\int_0^x f(-t)\,dt=-\int_0^x f(t)\,dt$ となり，$-t=u$ とおくと，

$$\int_0^x f(-t)\,dt=\int_0^{-x} f(u)(-du)=-\int_0^{-x} f(u)\,du=-\int_0^{-x} f(t)\,dt$$

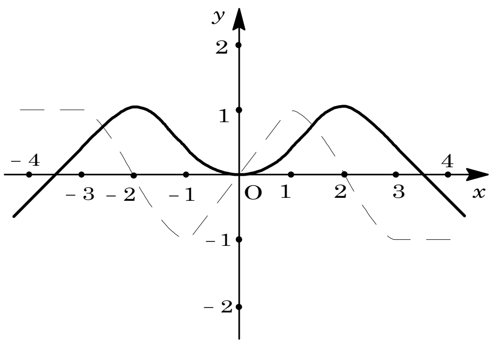
よって，$\int_0^{-x} f(t)\,dt=\int_0^x f(t)\,dt$ となるので，$y=\int_0^x f(t)\,dt$ のグラフは y 軸に関して対称となり，以下，$x \geqq 0$ で考える。

さて，$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ は，区間 $[0,\ x]$ において $y=f(x)$ と x 軸にはさまれた領域の符号つき面積を表すので，k を 1 より少し大きい値として，$0 \leqq x < 1$ のとき，$F(x)=\dfrac{k}{2}x^2$ となる。

$1 \leqq x \leqq 2$ のとき $F(x)$ の値は単調に増加し，$2 \leqq x \leqq 3$ のとき $F(x)$ の値は単調に減少し，$F(3)=F(1)$ となる。

$x \geqq 3$ のとき，$F(x)$ は傾き -1 の直線となる。

したがって，$y=\int_0^x f(t)\,dt$ のグラフの概形は右図のようになる。



[解 説]

定性的にグラフを書く問題です。ところで，そのポイント説明は，この程度で十分なのでしょうか。