**1**

問題のページへ

$f(x)=\log(\log x)$ とおくと，$f'(x)=\dfrac{1}{x\log x}$ となり，$p\leqq x\leqq q$ において平均値の定理を適用すると,

$$\frac{f(q)-f(p)}{q-p}=f'(c)\ (p<c<q)$$

ここで, $e\leqq p<c$ より，$c\log c>e\log e=e$ なので,

$$f'(c)=\frac{1}{c\log c}<\frac{1}{e}$$

よって，$\dfrac{f(q)-f(p)}{q-p}<\dfrac{1}{e}$，$f(q)-f(p)<\dfrac{q-p}{e}$ より,

$$\log(\log q)-\log(\log p)<\frac{q-p}{e}$$

**[解 説]**

証明する不等式をみて，平均値の定理に気付けば，一瞬にして解決します。

**2**

問題のページへ

$0 \leqq x \leqq \pi$ のときと，$\pi \leqq x \leqq 2\pi$ のときに場合分けをする。

(i)　$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき

$$f(x) = \int_0^x \sin\left(-t + x + \frac{\pi}{4}\right)dt + \int_x^\pi \sin\left(t - x + \frac{\pi}{4}\right)dt$$
$$= \left[\cos\left(-t + x + \frac{\pi}{4}\right)\right]_0^x + \left[-\cos\left(t - x + \frac{\pi}{4}\right)\right]_x^\pi$$
$$= \cos\frac{\pi}{4} - \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{5}{4}\pi - x\right) + \cos\frac{\pi}{4}$$
$$= \sqrt{2} - 2\cos\frac{3}{4}\pi\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}\sin x$$

(ii)　$\pi \leqq x \leqq 2\pi$ のとき

$$f(x) = \int_0^\pi \sin\left(-t + x + \frac{\pi}{4}\right)dt = \left[\cos\left(-t + x + \frac{\pi}{4}\right)\right]_0^\pi$$
$$= \cos\left(x - \frac{3}{4}\pi\right) - \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

(i)(ii)より，$0 \leqq x \leqq \pi$ では最大値 $2\sqrt{2}$ $\left(x = \frac{\pi}{2}\right)$，最小値 $\sqrt{2}$ $(x = 0,\ \pi)$ であり，また $\pi \leqq x \leqq 2\pi$ では最大値 $\sqrt{2}$ $(x = \pi)$，最小値 $-2$ $\left(x = \frac{7}{4}\pi\right)$ である。

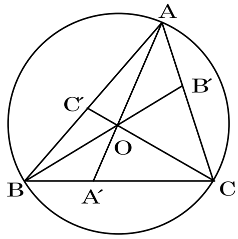
以上より，$f(x)$ の最大値は $2\sqrt{2}$ $\left(x = \frac{\pi}{2}\right)$，最小値は $-2$ $\left(x = \frac{7}{4}\pi\right)$ である。

## [解 説]

絶対値の付いた関数を積分するという頻出問題です。

**3**

問題のページへ




(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とおくと，$\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=k\cdot\frac{-\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{\alpha}=-k\left(\frac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{\gamma}{\alpha}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$$

点 A′ は線分 BC 上にあるので,

$$-k\left(\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha}\right)=1,\quad k=-\frac{-\alpha}{\beta+\gamma}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=-\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ ………①

(2)　(1)と同様にして，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=-\dfrac{\beta}{\gamma+\alpha}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ ………②，$\overrightarrow{\mathrm{OC'}}=-\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ ………③

△A′B′C′ の外心が O に一致するとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OA'}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB'}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC'}}|$

①②③より，$\alpha>0$，$\beta>0$，$\gamma>0$ なので,

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\frac{\beta}{\gamma+\alpha}|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\frac{\gamma}{\alpha+\beta}|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$$

条件より，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\neq 0$ なので，$\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma}=\dfrac{\beta}{\gamma+\alpha}=\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta}$

よって，正の数 $l$ が存在して，$\alpha=l(\beta+\gamma)$，$\beta=l(\gamma+\alpha)$，$\gamma=l(\alpha+\beta)$

$$\alpha+\beta+\gamma=2l(\alpha+\beta+\gamma)$$

$\alpha+\beta+\gamma>0$ より $l=\dfrac{1}{2}$ となるので,

$$2\alpha=\beta+\gamma\ \cdots\cdots\cdots④,\quad 2\beta=\gamma+\alpha\ \cdots\cdots\cdots⑤,\quad 2\gamma=\alpha+\beta\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

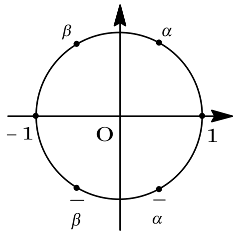
④⑤より $\alpha=\beta$，⑤⑥より $\beta=\gamma$，よって $\alpha=\beta=\gamma$ となる。

## [解 説]

ベクトルの基本問題です。(1)の誘導を利用すると, (2)の結論も簡単に導けます。

**4** a

問題のページへ




(1)　$\alpha=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，$\beta=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ とおくと，1，$\alpha$，$\beta$，$-1$，$\overline{\beta}$，$\overline{\alpha}$ が $z^6=1$ の解となる。

さて，有限数列 $\{z_n\}$ の中に，1，$\alpha$，$\beta$，$-1$，$\overline{\beta}$，$\overline{\alpha}$ が，それぞれ $a, b, c, 0, d, e$ 個ずつ含まれているとすると，

$$a+b+c+d+e=n\cdots\cdots\cdots①$$

条件より，$z_1+z_2+\cdots+z_n=0$ なので，

$$a+\frac{1}{2}(b+e)-\frac{1}{2}(c+d)=0,\ 2a+b-c-d+e=0\cdots\cdots\cdots②$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}b+\frac{\sqrt{3}}{2}c-\frac{\sqrt{3}}{2}d-\frac{\sqrt{3}}{2}e=0,\ b+c-d-e=0\cdots\cdots\cdots③$$

②＋③より，$2a+2b-2d=0$，$d=a+b\cdots\cdots\cdots$④

②－③より，$2a-2c+2e=0$，$c=a+e\cdots\cdots\cdots$⑤

条件より，$a\geqq1$，$b\geqq0$，$c\geqq0$，$d\geqq0$，$e\geqq0$ なので，④⑤から $c\geqq1$，$d\geqq1$ となり，$\beta$ も $\overline{\beta}$ も少なくとも 1 個含まれる。

(2)　$n=6$ のとき，①より $a+b+c+d+e=6$

④⑤を代入して，$3a+2b+2e=6$

$a=1$ のとき $2b+2e=3$ となり，この式を満たす $(b,\ e)$ は存在しない。

$a=2$ のとき $b+e=0$ となり，この式を満たすのは $(b,\ e)=(0,\ 0)$ である。このとき，④⑤より $c=d=2$ となる。

すなわち，$z_1$，$z_2$，…，$z_6$ の中には，1，$\beta$，$\overline{\beta}$ が 2 個ずつ含まれているので，そのとり方は，$\dfrac{6!}{2!2!2!}=90$ 個である。

## [解　説]

いかにも難問のような感じですが，$z^6=1$ の解を設定し，その個数について方程式を立てていくと，うまく解けます。

**4b**　問題のページへ

(1)　$k$ 回目に硬貨を投げた後，駒が点 $-1$，0，1，2，3 にある確率を，それぞれ $a_k$，$b_k$，$c_k$，$d_k$，$e_k$ とおく。

$$a_{k+1}=a_k+\frac{1}{2}b_k\cdots\cdots\text{①},\quad b_{k+1}=\frac{1}{2}c_k\cdots\cdots\text{②},\quad c_{k+1}=\frac{1}{2}b_k+\frac{1}{2}d_k\cdots\cdots\text{③}$$

$$d_{k+1}=\frac{1}{2}c_k\cdots\cdots\text{④},\quad e_{k+1}=\frac{1}{2}d_k+e_k\cdots\cdots\text{⑤}$$

②③④より，$c_{k+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}c_{k-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}c_{k-1}=\frac{1}{2}c_{k-1}$

$k$ が偶数のとき，$c_0=0$ なので $c_k=0$

$k$ が奇数のとき，$k=2n-1$ とおくと，$c_1=\frac{1}{2}$，$c_{2n+1}=\frac{1}{2}c_{2n-1}$ より，

$$c_{2n-1}=c_1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n,\quad c_k=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k+1}{2}}$$

(2)　$k$ が偶数 $(k=2n)$ のとき，(1)より $c_{2n}=0$，②④より $b_{2n+1}=d_{2n+1}=0$ となる。

$k$ が奇数 $(k=2n-1)$ のとき，(1)より $c_{2n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$，②④より $b_{2n}=d_{2n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ となる。

すると，①より $a_{2n+1}=a_{2n}+\frac{1}{2}b_{2n}=a_{2n}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\cdots\cdots$⑥

$$a_{2n}=a_{2n-1}+\frac{1}{2}b_{2n-1}=a_{2n-1}\cdots\cdots\text{⑦}$$

⑥⑦より，$a_{2n+1}=a_{2n-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$

$a_1=\frac{1}{2}$ なので，$n\geqq 2$ において，

$$a_{2n-1}=\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{i+2}=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{8}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$n=1$ をあてはめると，$a_1=\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$ となり成立する。

また⑦より，$a_{2n}=\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

同様にして，⑤より，$e_{2n+1}=e_{2n-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$，$e_1=0$ なので，

$n\geqq 2$ において，$e_{2n-1}=0+\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{i+2}=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$（$n=1$ のときも成立）

さらに，$e_{2n}=e_{2n-1}=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

すると，$k$ が偶数 $(k=2n)$ のとき，右表のようになり，

| $X_{2n}$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X_{2n})$ | $\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ | $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ | 0 | $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ | $\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ |

$$E[X_{2n}]=-\left\{\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+3\left\{\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}=0$$

また，$k$ が奇数 $(k=2n-1)$ のとき，右表のようになり，

| $X_{2n-1}$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X_{2n-1})$ | $\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ | 0 | $\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$ | 0 | $\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ |

$$E[X_{2n-1}]=-\left\{\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+3\left\{\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}=0$$

以上より，$k$ の偶奇にかかわらず，$E[X_k]=0$ となる。

## [解　説]

ランダムウォークを題材にした頻出問題です。漸化式を立てて，ていねいに解いてみました。