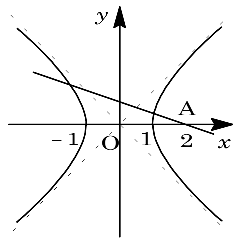
1

問題のページへ

(1)　点A$(2,\ 0)$を通る直線$x=2$は，双曲線$C: x^2-y^2=1$……①と明らかに 2 点で交わる。



また，点Aを通り，傾きmの直線は，

$$y=m(x-2)\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$x^2-m^2(x-2)^2=1$

$$(1-m^2)x^2+4m^2x-4m^2-1=0\cdots\cdots\cdots③$$

(i)　$1-m^2=0\ (m=\pm1)$のとき

③より，$4x-5=0$，$x=\dfrac{5}{4}$

$m=1$のとき②より$y=-\dfrac{3}{4}$，$m=-1$のとき②より$y=\dfrac{3}{4}$

いずれの場合も，①と②は 1 点でのみ交わる。

(ii)　$1-m^2\neq0\ (m\neq\pm1)$のとき

③の判別式$D/4=4m^4+(1-m^2)(4m^2+1)=3m^2+1>0$

よって，①と②はつねに 2 点で交わる。

(i)(ii)より, Aを通りCと 1 点のみで交わる直線は，$y=x-2$，$y=-x+2$

(2)　まず，$l: x=2$のとき, 2 交点の中点は点$(2,\ 0)$である。

また，$l: y=m(x-2)\ (m\neq\pm1)$のとき, 2 交点の中点をP$(x,\ y)$とする。

ここで，③の 2 つの解を$x=\alpha,\ \beta$とすると,

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{-4m^2}{2(1-m^2)}=\frac{2m^2}{m^2-1}\cdots\cdots\cdots④$$

②より，$y=m(x-2)$……⑤となり，④と⑤の交点がP$(x,\ y)$なので,

$x\neq2$から，⑤より$m=\dfrac{y}{x-2}$

④に代入して，$x\left\{\left(\dfrac{y}{x-2}\right)^2-1\right\}=2\left(\dfrac{y}{x-2}\right)^2$

$$x\left\{y^2-(x-2)^2\right\}=2y^2,\ (x-2)y^2-x(x-2)^2=0$$

$x\neq2$より，$y^2-x(x-2)=0$，$x^2-2x-y^2=0$，$(x-1)^2-y^2=1$

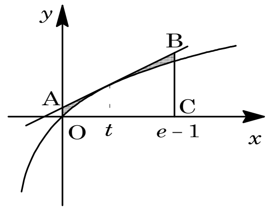
点$(2,\ 0)$もこの式を満たすので，点Pは双曲線$(x-1)^2-y^2=1$上にある。

[解 説]

(1)の解はていねいに書きましたが，漸近線に平行な直線だけが，双曲線と 1 点のみで交わるのは明らかです。

2　　問題のページへ

(1)　$y=\log(x+1)$ より，$y'=\dfrac{1}{x+1}$



$0\leqq t\leqq e-1$ として，接点を $(t,\ \log(t+1))$ とすると，接線の方程式は，

$$y=\frac{1}{t+1}(x-t)+\log(t+1)$$
$$=\frac{1}{t+1}x-\frac{t}{t+1}+\log(t+1)$$

この方程式が $y=ax+b$ と一致するので，

$$a=\frac{1}{t+1}\ \cdots\cdots\cdots①,\quad b=-\frac{t}{t+1}+\log(t+1)\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$t+1=\dfrac{1}{a}$，$t=\dfrac{1}{a}-1$

②に代入して，$b=-1+a-\log a\ \cdots\cdots\cdots③$

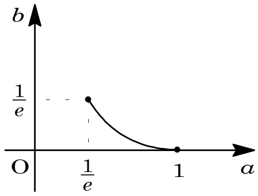
ここで，$0\leqq t\leqq e-1$ より，$\dfrac{1}{e}\leqq a\leqq 1$

③より，$b'=1-\dfrac{1}{a}=\dfrac{a-1}{a}$

$$b''=\frac{1}{a^2}>0$$

a	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	1
b'		$-$	0
b	$\frac{1}{e}$	↘	0

よって，点 $(a,\ b)$ の存在範囲は右図のようになる。



(2)　台形 AOCB の面積を S_0 とすると，

$$\mathrm{OA}=b,\quad \mathrm{CB}=a(e-1)+b$$
$$S_0=\frac{b+a(e-1)+b}{2}\cdot(e-1)=\frac{e-1}{2}\left\{(e-1)a+2b\right\}$$

ここで，$f(t)=(e-1)a+2b$ とおくと，①②より，

$$f(t)=\frac{e-1}{t+1}-\frac{2t}{t+1}+2\log(t+1)$$
$$=\frac{e+1}{t+1}+2\log(t+1)-2$$
$$f'(t)=-\frac{e+1}{(t+1)^2}+\frac{2}{t+1}=\frac{2t-e+1}{(t+1)^2}$$

t	0	$\cdots$	$\frac{e-1}{2}$	$\cdots$	$e-1$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘		↗	

右表より，$t=\dfrac{e-1}{2}$ のとき $f(t)$ は最小値をとる。

$$f\left(\frac{e-1}{2}\right)=\frac{2(e+1)}{(e-1)+2}+2\log\left(\frac{e-1}{2}+1\right)-2=2\log\frac{e+1}{2}$$

さて，求める網点部の面積を S とすると，

$$S = S_0 - \int_0^{e-1} \log(x+1)\,dx$$
$$= \frac{e-1}{2} f(t) - \left\{ \Big[(x+1)\log(x+1) \Big]_0^{e-1} - \int_0^{e-1} dx \right\}$$
$$= \frac{e-1}{2} f(t) - e + (e-1) = \frac{e-1}{2} f(t) - 1$$

以上より，S は $t = \dfrac{e-1}{2}$ のとき，最小値 $\dfrac{e-1}{2} f\left(\dfrac{e-1}{2}\right) - 1 = (e-1)\log\dfrac{e+1}{2} - 1$ をとる。

このとき，①より $a = \dfrac{2}{e+1}$，②より $b = -\dfrac{e-1}{e+1} + \log\dfrac{e+1}{2}$

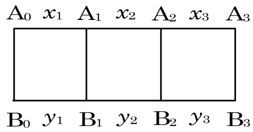
[解 説]

微積分総合と称される分野の典型問題です。(2)は図形的に考えてもよいのですが，ここではオーソドックスに解きましたので, B5 版 1 枚では収まりませんでした。

3

問題のページへ

(1)　$1 \leqq i \leqq 3$ として，右に移動する $\mathrm{A}_{i-1}\mathrm{A}_i$ のルートを x_i，$\mathrm{B}_{i-1}\mathrm{B}_i$ のルートを y_i とする。また，$\mathrm{A}_0\mathrm{B}_0$，$\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$，$\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2$，$\mathrm{A}_3\mathrm{B}_3$ のルートは，右に移動するルートに対応して 1 通りずつ決まる。



すると，A_0 から A_3 に到るルートの組合せは，

$(x_1,\ x_2,\ x_3)$，$(x_1,\ x_2,\ y_3)$，$(x_1,\ y_2,\ x_3)$，$(x_1,\ y_2,\ y_3)$，

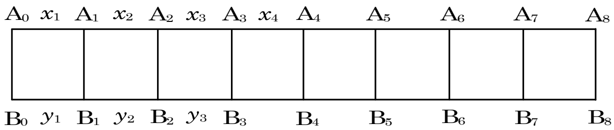
$(y_1,\ x_2,\ x_3)$，$(y_1,\ x_2,\ y_3)$，$(y_1,\ y_2,\ x_3)$，$(y_1,\ y_2,\ y_3)$

したがって，$a_3 = 8$

A_0 から B_3 に到るルートの組合せも上記の 8 通りなので，$b_3 = 8$ となる。

(2)　(1)と同様に考えて，右に移動するルートは，$1 \leqq i \leqq n$ として，x_i または y_i を選べばよいので，$a_n = b_n = 2^n$ となる。

(3)　P と Q は，A_4 で 4 秒後に，または A_3 で 5 秒後に出会う場合しかない。



4 秒後に出会うとき，P の右に移動するルートは，$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ より，その確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^4 = \dfrac{1}{16}$ となる。

また, 5 秒後に出会うとき, P の右に移動するルートは,

$(x_1,\ x_2,\ y_3)$，$(x_1,\ y_2,\ x_3)$，$(y_1,\ x_2,\ x_3)$，$(x_1,\ y_2,\ y_3)$，

$(y_1,\ y_2,\ x_3)$，$(y_1,\ y_2,\ y_3)$

その確率は順に，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^4$，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^4$，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^4$ となるので，合わせて，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^4 \times 3 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 \times 3 = \dfrac{9}{16}$ となる。

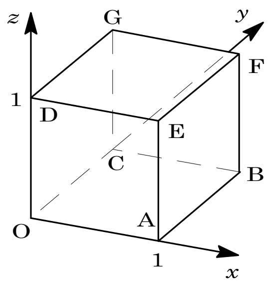
以上より, P と Q が出会う確率は，$\dfrac{1}{16} + \dfrac{9}{16} = \dfrac{5}{8}$

[解 説]

(1)や(3)は具体的に考え，その過程を解として書く問題です。しかし，考えたことをわかりやすく表現しようとすると，ずいぶん時間がかかってしまいます。

4a　問題のページへ

立方体 C を平面 H へ正射影した図形は，面 OABC，面 OAED，面 OCGD を H へ正射影した図形となる。



まず，面 OABC の法線ベクトルを $\overrightarrow{n_1}=(0,\ 0,\ 1)$，また，平面 H の法線ベクトルが $\vec{l}=(-a_1,\ -a_2,\ -a_3)$ なので，面 OABC と平面 H のなす角を θ_1 $(0°\leqq\theta_1\leqq 90°)$ とすると，

$$\cos\theta_1=\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\vec{l}|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\vec{l}|}=\frac{|-a_3|}{1\times 1}=a_3$$

すると，面 OABC の面積が 1 より，H へ正射影した図形の面積は，

$$1\times\cos\theta_1=a_3$$

同様にして，面 OAED，面 OCGD は，法線ベクトルがそれぞれ $\overrightarrow{n_2}=(0,\ 1,\ 0)$，$\overrightarrow{n_2}=(1,\ 0,\ 0)$ となり，平面 H とのなす角を θ_2，θ_3 $(0°\leqq\theta_2\leqq 90°,\ 0°\leqq\theta_3\leqq 90°)$ とすると，

$$\cos\theta_2=\frac{|\overrightarrow{n_2}\cdot\vec{l}|}{|\overrightarrow{n_2}|\cdot|\vec{l}|}=\frac{|-a_2|}{1\times 1}=a_2$$

$$\cos\theta_3=\frac{|\overrightarrow{n_3}\cdot\vec{l}|}{|\overrightarrow{n_3}|\cdot|\vec{l}|}=\frac{|-a_1|}{1\times 1}=a_1$$

すると，面 OAED，面 OCGD の面積が 1 より，H へ正射影した図形の面積は，それぞれ，

$$1\times\cos\theta_2=a_2,\ 1\times\cos\theta_3=a_1$$

以上より，求める立方体 C の影の面積は，$a_1+a_2+a_3$ となる。

［解 説］

この問題を読んだ瞬間，名大の有名問題を思い出しました。旧課程時代に作成したいろいろなテキストに，凸多面体を平面へ正射影する典型題として，よく採用したのですが，出題年度を調べたところ 1987 年でした。もう時効でしょうか。

4b

問題のページへ

(1)　$x^3+px^2+qx+r=0$ ……①が虚数解 $x=\alpha$ をもつとき，

$\alpha^3+p\alpha^2+q\alpha+r=0$

両辺の共役をとると, p, q, r が実数より，

$\overline{\alpha^3+p\alpha^2+q\alpha+r}=\overline{0}$，$\overline{\alpha}^3+p\overline{\alpha}^2+q\overline{\alpha}+r=0$

これは，$x=\overline{\alpha}$ が①の解であることを示すので，$\beta=\overline{\alpha}$ となる。

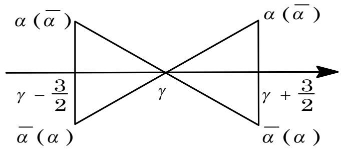
(2)　(1)より①の解が α，$\overline{\alpha}$，γ となるので，条件より，$\alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}\gamma+\gamma\alpha=3$ ………②

ここで，方程式①に対して，解と係数の関係より，

$\alpha+\overline{\alpha}+\gamma=-p$，$\alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}\gamma+\gamma\alpha=q$，$\alpha\overline{\alpha}\gamma=-r$

②より，$p=-(\alpha+\overline{\alpha})-\gamma$，$q=3$，$r=-\alpha\overline{\alpha}\gamma$ ………③

さて，複素数平面上において，2 点 α，$\overline{\alpha}$ は実軸対称であり，条件から 3 点 α，$\overline{\alpha}$，γ が 1 辺 $\sqrt{3}$ の正三角形の頂点となるので，右図より，



$$\alpha=\gamma+\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad \alpha=\gamma-\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

すると，②を $\alpha\overline{\alpha}+\gamma(\alpha+\overline{\alpha})=3$ ……④と変形して，

(i)　$\alpha=\gamma+\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ のとき

④より，$\left(\gamma+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\gamma\cdot 2\left(\gamma+\frac{3}{2}\right)=3$，$3\gamma^2+6\gamma=0$

$\gamma=0$ のとき $\alpha=\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ となり，③より $(p,\ q,\ r)=(-3,\ 3,\ 0)$

$\gamma=-2$ のとき $\alpha=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ となり，③より $(p,\ q,\ r)=(3,\ 3,\ 2)$

(ii)　$\alpha=\gamma-\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ のとき

④より，$\left(\gamma-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\gamma\cdot 2\left(\gamma-\frac{3}{2}\right)=3$，$3\gamma^2-6\gamma=0$

$\gamma=0$ のとき $\alpha=-\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ となり，③より $(p,\ q,\ r)=(3,\ 3,\ 0)$

$\gamma=2$ のとき $\alpha=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ となり，③より $(p,\ q,\ r)=(-3,\ 3,\ -2)$

[解 説]

昨年度のセンター試験に類題が出ています。現行課程で学んだ者にとっては，4a よりかなり易しめです。