$\boxed{1}$ 解答解説のページへ

m を 2 以上の自然数, e を自然対数の底とする。

(1)　方程式 $xe^x - me^x + m = 0$ を満たす正の実数 x の値はただ 1 つであることを示せ。
またその値を c とするとき，$m-1 < c < m$ となることを示せ。

(2)　$x > 0$ の範囲で $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x^m}$ は $x = c$ で最小となることを示せ。

(3)　a_m を(2)で求められる $f(x)$ の最小値とするとき，$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{\log a_m}{m\log m}$ を求めよ。

2　解答解説のページへ

長さ 2 の線分 AB を直径とする円を底面とし，高さが $\sqrt{3}$ の直円錐を考える。この直円錐の側面上で 2 点 A，B を結ぶ最短の道を l とする。直円錐の頂点を C，底面の中心を O とし以下の問いに答えよ。

(1)　直円錐の展開図を用いて，l の長さを求めよ。

(2)　l 上の点 P に対して，線分 CP の延長と弧 AB の交点を Q とする。$\angle\mathrm{AOQ}=\theta$ として CP^2 を $\sin\theta$ で表せ。ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。

(3)　P から線分 OQ に下ろした垂線を PR とし，A から線分 OQ に下ろした垂線を AS とする。$0^\circ < \theta \leqq 90^\circ$ の範囲で $\dfrac{\mathrm{OS}^2}{\mathrm{OR}^2}$ の最大値を求めよ。

3

解答解説のページへ

(1)　実数$k \geqq 0$に対し，

$$\int_0^{2\pi} \left\{ y\left(x\cos\theta + \frac{1}{2}x^2 \right) - \left(x\cos\theta + \frac{1}{2}x^2 \right)^2 \right\} \cos\theta \, d\theta = 2k\pi$$

を満たすxy平面内の曲線の方程式を求めよ。

(2)　(1)で求めた曲線と直線$y = a$との共有点が 1 個であるような実数 a の範囲を求めよ。

4A　解答解説のページへ

関数 $f(x)=1-x^2$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$f(a)=a$ を満たす正の実数 a を求めよ。

(2)　a を(1)で求めた実数とする。$x \geqq \dfrac{1}{2}$ ならば，$|f(x)-f(a)| \geqq \dfrac{\sqrt{5}}{2}|x-a|$ となることを示せ。

(3)　a を(1)で求めた実数とする。$\dfrac{1}{2} \leqq x_1 \leqq 1$ として，

$$x_{n+1}=f(x_n)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で決まる数列 $\{x_n\}$ を考える。すべての n に対して $\dfrac{1}{2} \leqq x_n \leqq 1$ が成り立つならば，$x_1=a$ であることを示せ。

4B

解答解説のページへ

実数 a, b は $0<a<b$ を満たすとする。次の 3 つの数の大小関係を求めよ。

$$\frac{a+2b}{3},\ \sqrt{ab},\ \sqrt[3]{\frac{b(a^2+ab+b^2)}{3}}$$

4C

解答解説のページへ

次の(1), (2)では，それぞれ，その目的を実行するための BASIC によるプログラムの始めの部分が与えられている。方針を記述してから，プログラムの残りの部分を完成せよ。ただし，変数 A(1), A(2)等には座標 a_1，a_2 等が入力されるものとする。

注意：(1)のプログラムでは配列を表すために DIM 文を使っているが, DIM 文を使わないプログラムを作成してもよい。そのときは，行番号 10 の文は消去し，行番号 20, 30 の文は

```
20　INPUT　A1, A2
30　INPUT　P1, P2
```

で置き換えるものとする。(2)についても，同様である。

(1)　座標平面上の原点 O と異なる点 A$(a_1,\ a_2)$ について，任意の点 P$(p_1,\ p_2)$ から直線 OA への距離を表示すること。

```
10　DIM　A(2), P(2)
20　INPUT　A(1), A(2)
30　INPUT　P(1), P(2)
```

(2)　点 A$(a_1,\ a_2)$，B$(b_1,\ b_2)$ を座標平面上の相異なる点とし，直線 AB で平面を二分する。点 P$(p_1,\ p_2)$，Q$(q_1,\ q_2)$ がこの直線の同じ側にあるときは 1 を，異なる側にあるときは -1 を，P，Q の少なくとも一方がこの直線上にあるときは 0 を表示すること。ただし，ある点と直線との距離が，与えられた正数 0.00001 より小さいときはその点は直線上にあるとみなすことにする。

```
10　DIM　A(2), B(2), P(2), Q(2)
20　EPS = 0.00001
30　INPUT　A(1), A(2)
40　INPUT　B(1), B(2)
50　INPUT　P(1), P(2)
60　INPUT　Q(1), Q(2)
```

5D

解答解説のページへ

A, B の 2 名で次のゲームを行う。A, B はそれぞれ表に 1 から n までの数字がひとつずつ書かれた n 枚のカードを持っている(裏には何も書かれていない)。A は自分のすべてのカードを表を下にして並べる。B は, A が並べたそれぞれのカードの前に自分のカードを表を上にして 1 枚ずつ並べる。次に A のカードを表向きにし, B は数字が一致したカードの枚数だけ得点を得る。確率変数 X を B が 1 回のゲームで得る点数とするとき次の問いに答えよ。

(1) $n=5$ のとき確率 $P(X=2)$ を求めよ。

(2) B のカードのうち数字が 1 のものが一致する確率を p とする。

$p=\sum_{k=1}^{n} a_k P(X=k)$ と表すとき, a_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ を求めよ。

(3) 期待値 $E(X)$ を求めよ。

5E　解答解説のページへ

k を実数として，2 次方程式 $x^2+2kx+3k=0$ の 2 つの解を α，β $(\alpha\neq\beta)$ とする。i を虚数単位として次の問いに答えよ。

(1)　$|\alpha-i|^2+|\beta-i|^2$ の値を k を用いて表せ。

(2)　複素数平面において，複素数 α，β，i を表す点をそれぞれ A，B，P とする。$\angle\mathrm{APB}$ が直角となるような k の値を求めよ。

5F

解答解説のページへ

大きさ 1 の空間ベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$が$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=-\dfrac{1}{2}$, $\vec{a}\cdot\vec{c}=0$を満たすように与えられているとする。また空間ベクトル$\vec{d}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$が

$$\vec{a}\cdot\vec{d}=1,\ \vec{b}\cdot\vec{d}=0,\ \vec{c}\cdot\vec{d}=0,$$
$$\vec{a}\cdot\vec{e}=0,\ \vec{b}\cdot\vec{e}=1,\ \vec{c}\cdot\vec{e}=0,$$
$$\vec{a}\cdot\vec{f}=0,\ \vec{b}\cdot\vec{f}=0,\ \vec{c}\cdot\vec{f}=1$$

を満たすとき, 点D($\vec{d}$), E($\vec{e}$), F($\vec{f}$)および原点 O について次の問いに答えよ。

(1) $\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$となるような実数$x, y, z$を求めよ。同様に$\vec{f}$を$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$で表せ。

(2) ベクトル$\vec{d}$, $\vec{f}$, $\vec{d}-\vec{f}$の大きさを求めよ。

(3) 三角形 ODF の面積を求めよ。

(4) 四面体 ODEF の体積を求めよ。