1

解答解説のページへ

以下において，$f(x)$ はすべての実数 x において微分可能な関数とし，$F(x)=e^x f(x)$ とおく。

(1)　定数関数でない関数 $f(x)$ で

条件(A)：すべての x に対して $f(x+1)=f(x)$ である

をみたすものの例をあげよ。

(2)　関数 $f(x)$ が

条件(B)：すべての x に対して $f'(x)+f(x)\leqq 0$ である

をみたすとき，$a<b$ ならば $F(a)\geqq F(b)$ であることを示せ。

(3)　関数 $f(x)$ が(1)の条件(A)をみたすとき，$F(x+n)$（ただし，n は正の整数）を $F(x)$ を用いて表せ。

(4)　関数 $f(x)$ が(1), (2)の条件(A), (B)をともにみたすとする。

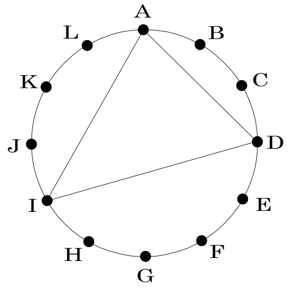
①　$f(c)\geqq 0$ となる c が存在すれば，$f(c)=0$ であることを示せ。

②　ある c で $f(c)=0$ であれば，すべての x で $f(x)=0$ となることを示せ。

2

解答解説のページへ

右図のように円周を 12 等分する点 A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L が与えられている。これらの中から相異なる 3 点を選んで線分で結ぶと三角形が得られる。たとえば, A, D, I を選べば, 図のような三角形が得られる。このとき, 次の問いに答えよ。



(1)　正三角形を与えるような 3 点の選び方の総数を求めよ。

(2)　二等辺三角形を与えるような 3 点の選び方の総数を求めよ。

(3)　直角三角形を与えるような 3 点の選び方の総数を求めよ。

(4)　3 点を選んで得られる三角形のうち, 互いに合同でないものは全部でいくつあるか。

3

解答解説のページへ

平面上の曲線 C が媒介変数 t を用いて

$$x=\sin t-t\cos t,\quad y=\cos t+t\sin t\quad (0\leqq t\leqq \pi)$$

で与えられている。

(1) 曲線 C の長さを求めよ。

(2) 曲線 C 上の各点 P において, P における接線と P で直交する直線を考える。この直線上の点で原点までの距離が最短となる点は, P を動かすときどんな図形を描くか。

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} t\sin 2t\,dt$ を求めよ。

(4) 曲線 C と y 軸および直線 $y=-1$ で囲まれる図形の面積 S を求めよ。

4A

解答解説のページへ

(1)　$x \geqq y \geqq 0$ のとき，不等式 $\dfrac{x}{1+x} \geqq \dfrac{y}{1+y}$ が成り立つことを示せ。

(2)　① 不等式 $\dfrac{|x|}{1+|x|}+\dfrac{|y|}{1+|y|}+\dfrac{|z|}{1+|z|} \geqq \dfrac{|x+y+z|}{1+|x+y+z|}$ が成り立つことを示せ。

　② ①の不等式で等号が成り立つのはどのような場合か調べよ。

4B 解答解説のページへ

(1)　自然数 $n=1,\ 2,\ 3,\cdots$ について，次の等式が成り立つことを示せ。

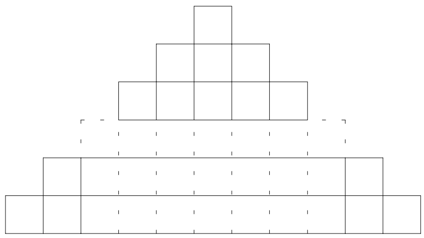
$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

(2)　辺の長さ 1 の正三角形のタイルをいくつか用意して，辺の長さが自然数 m の正三角形をタイルで張りつめたい。

① $m=2,\ 3,\ 4$ のとき，どのようにタイル張りをすればよいか図示せよ。

② 一般に，辺の長さ m の正三角形をタイルで張りつめるのに必要なタイルの個数を m の式で表し，その式が成り立つ理由を述べよ。

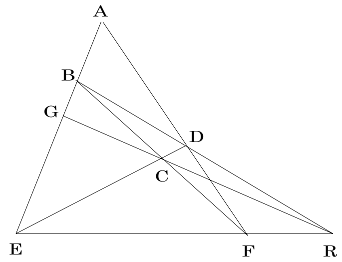
(3)　辺の長さ 1 の正三角形を底面とする高さ 1 の正三角柱のブロックをいくつか用意して，すき間なく並べて高さ 1 の正三角柱の台を作る。このような台を n 段積み上げ，高さ n の台を作る。この台を真横から見たとき下図のように見えたという。ただし，図の小四角形はすべて辺の長さ 1 の正方形である。このとき台全体の体積を求めよ。



4C

解答解説のページへ

右図のような四角形 ABCD において，直線 AB と直線 CD の交点 E，直線 BC と直線 AD の交点 F，直線 BD と直線 EF の交点 R，直線 RC と直線 AB の交点 E がえられたとする。



(1)　$\dfrac{\mathrm{BG}}{\mathrm{GE}}=\dfrac{\mathrm{BA}}{\mathrm{AE}}$ が成り立つことを示せ。

(2)　G が AE の中点で，$\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DF}}=2$ であるとき，

　AB $=a$，CD $=b$ とおく。次の条件をみたす x, y, z の値を求めよ。

　①　EB $=xa$

　②　EC $=yb$

　③　四角形 ABCD が円に内接するとき，$a=zb$

5D

解答解説のページへ

辺の長さ 1 の正四面体 OABC において，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおき，線分 OA を $m:n$ に内分する点を P，線分 BC を $m:n$ に内分する点を Q，線分 CO を $m:n$ に内分する点を R，線分 AB を $m:n$ に内分する点を S とする。（ただし，$m, n>0$ とする）

(1) ① $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

② $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ が垂直かどうか調べよ。

(2) ① 点 P, Q, R, S が同一平面上にあるときの m, n の関係を求めよ。

② このとき PQ, RS の交点を G として，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

③ G は正四面体 OABC に外接する球の中心であることを示し，その球の半径を求めよ。

5E　　解答解説のページへ

k を実数とするとき，方程式

$$x^3-(2k+1)x^2+(4k^2+2k)x-4k^2=0$$

の解を z_1，z_2，z_3 とし，それらを複素数平面上の点とみなす。

(1)　z_1，z_2，z_3 が一直線上にあるような k の値を求めよ。

(2)　z_1，z_2，z_3 が直角三角形をなすような k の値を求めよ。

(3)　3 点 z_1，z_2，z_3 を原点のまわりに角 θ だけ回転して得られる 3 点を w_1，w_2，w_3 とする。w_1，w_2，w_3 およびそれらと共役な点 $\overline{w_1}$，$\overline{w_2}$，$\overline{w_3}$ とが，原点中心の正六角形の頂点となるとき, k および θ（$0\leqq\theta\leqq\pi$）の値を求めよ。

5F

解答解説のページへ

3 桁の自然数$N=100a+10b+c$（a, b, c は，$1\leqq a\leqq 9$，$0\leqq b\leqq 9$，$0\leqq c\leqq 9$ をみたす整数）を考える。

(1)　平方数かつ奇数である N で, 2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが x 軸と接するようなものをすべて求めよ。

(2)　命題「N および a が平方数のとき 2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは x 軸と接する」は正しいか。正しければそれを示し，正しくなければ反例をあげよ。

(3)　ある N について, 2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは座標が整数である相異なる 2 点で x 軸と交わり，グラフと x 軸とで囲まれる部分の面積が 4 となる。このときの N を求めよ。

5G

解答解説のページへ

(1)　平面上に半径が R, r（$R>r$）の 2 円があり，それらの中心間の距離が l であるとする。これらの 2 円の円周が共有点をもつための必要十分条件を R, r, l を用いて表せ。

(2)　座標平面上で x 軸を準線とし，定点 $\mathrm{A}(0,\ a)$ を通る放物線について考える。ただし，$a>0$ とする。

① そのような放物線の焦点 $\mathrm{F}(s,\ t)$ の全体はどのような図形を描くか。

② x 軸上にない点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ がそのような放物線上の点であるための必要十分条件を求めよ。