

1

解答解説のページへ

曲線 $y = \sqrt{x}$ 上の点 $P(t, \sqrt{t})$ から直線 $y = x$ へ垂線を引き、交点を H とする。ただし、 $t > 1$ とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) H の座標を t を用いて表せ。
- (2) $x = 1$ の範囲において、曲線 $y = \sqrt{x}$ と直線 $y = x$ および線分 PH とで囲まれた図形の面積を S_1 とするとき、 S_1 を t を用いて表せ。
- (3) 曲線 $y = \sqrt{x}$ と直線 $y = x$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする。 $S_1 = S_2$ であるとき、 t の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

a を正の定数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 関数 $f(x) = (x^2 + 2x + 2 - a^2)e^{-x}$ の極大値および極小値を求めよ。
- (2) $x = 3$ のとき、不等式 $x^3 e^{-x} > 27e^{-3}$ が成り立つことを示せ。さらに、極限值 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x}$ を求めよ。
- (3) k を定数とする。 $y = x^2 + 2x + 2$ のグラフと $y = ke^x + a^2$ のグラフが異なる 3 点で交わるための必要十分条件を、 a と k を用いて表せ。

3

解答解説のページへ

数列 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ は

$$a_{n+1} = \frac{2a_n}{1-a_n^2} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

を満たしているとする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ とするとき、一般項 a_n を求めよ。
- (2) $\tan \frac{\pi}{12}$ の値を求めよ。
- (3) $a_1 = \tan \frac{\pi}{20}$ とするとき、 $a_{n+k} = a_n$ ($n=3, 4, 5, \dots$) を満たす最小の自然数 k を求めよ。

4

解答解説のページへ

空間内の 4 点 $O(0, 0, 0)$, $A(0, 2, 3)$, $B(1, 0, 3)$, $C(1, 2, 0)$ を考える。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 4 点 O, A, B, C を通る球面の中心 D の座標を求めよ。
- (2) 3 点 A, B, C を通る平面に点 D から垂線を引き、交点を F とする。線分 DF の長さを求めよ。
- (3) 四面体 $ABCD$ の体積を求めよ。

5

解答解説のページへ

1 から 4 までの数字が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードがある。その 4 枚のカードを横一列に並べ、以下の操作を考える。

操作：1 から 4 までの数字が 1 つずつ書かれた 4 個の球が入っている袋から同時に 2 個の球を取り出す。球に書かれた数字が i と j ならば、 i のカードと j のカードを入れかえる。その後、2 個の球は袋に戻す。

初めにカードを左から順に 1, 2, 3, 4 と並べ、上の操作を n 回繰り返した後のカードについて、以下の問いに答えよ。

- (1) $n = 2$ のとき、カードが左から順に 1, 2, 3, 4 と並ぶ確率を求めよ。
- (2) $n = 2$ のとき、カードが左から順に 4, 3, 2, 1 と並ぶ確率を求めよ。
- (3) $n = 2$ のとき、左端のカードの数字が 1 になる確率を求めよ。
- (4) $n = 3$ のとき、左端のカードの数字の期待値を求めよ。