

1

問題のページへ

- (1) 直線 AB の方程式は, A(2, 6), B(3, 4) から,

$$y - 6 = -2(x - 2), \quad y = -2x + 10 \dots\dots$$

直線 OC は直線 AB と垂直なので, その方程式は,

$$y = \frac{1}{2}x \dots\dots$$

$$\text{より, } -2x + 10 = \frac{1}{2}x, \quad x = 4$$

より, $y = 2$ となり, C(4, 2) である。また, $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ より,

$$\overrightarrow{OP} = s(2, 6) + t(3, 4) = (2s + 3t, 6s + 4t)$$

$$|\overrightarrow{CP}|^2 = (2s + 3t - 4)^2 + (6s + 4t - 2)^2$$

$$= (2s + 3t)^2 - 8(2s + 3t) + 16 + (6s + 4t)^2 - 4(6s + 4t) + 4$$

$$= 40s^2 + 60st + 25t^2 - 40s - 40t + 20$$

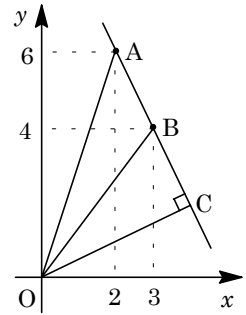
- (2)
- $t = 0$
- において,
- $f(t) = 40s^2 + 60st + 25t^2 - 40s - 40t + 20$
- とおくと,

$$f(t) = 25t^2 + (60s - 40)t + 40s^2 - 40s + 20 = 25\left(t + \frac{6s - 4}{5}\right)^2 + 4s^2 + 8s + 4$$

- (i)
- $-\frac{6s - 4}{5} \leq 0$
- (
- $s \leq \frac{2}{3}$
-) のとき

 $|\overrightarrow{CP}|^2$ は, $t = -\frac{6s - 4}{5}$ で最小値 $4s^2 + 8s + 4$ をとる。

- (ii)
- $-\frac{6s - 4}{5} < 0$
- (
- $s > \frac{2}{3}$
-) のとき

 $|\overrightarrow{CP}|^2$ は, $t = 0$ で最小値 $40s^2 - 40s + 20$ をとる。


[解説]

ベクトルの成分計算についての基本題です。文系に類題があります。

2

問題のページへ

- (1) 偶数の書かれたカードを取り出す確率は $\frac{M}{M+N}$, 奇数の書かれたカードを取り出す確率は $\frac{N}{M+N}$ より, 記録された 1 個の数が偶数となる確率 p_1 は,

$$p_1 = \frac{M}{M+N}$$

また, 記録された 2 個の数の和が偶数となるのは, 偶数 + 偶数または奇数 + 奇数より, その確率 p_2 は,

$$p_2 = \left(\frac{M}{M+N}\right)^2 + \left(\frac{N}{M+N}\right)^2 = \frac{M^2 + N^2}{(M+N)^2}$$

- (2) 記録された $n+1$ 個の数の和が偶数となるのは, n 個の数の和が偶数のとき $n+1$ 回目に偶数を取り出すか, n 個の数の和が奇数のとき $n+1$ 回目に奇数を取り出すかのいずれかより,

$$p_{n+1} = \frac{M}{M+N} p_n + \frac{N}{M+N} (1-p_n) = \frac{M-N}{M+N} p_n + \frac{N}{M+N} \dots\dots\dots (*)$$

- (3) (i) k が偶数のとき $M = 2 + 4 + \dots + k = \frac{2+k}{2} \cdot \frac{k}{2} = \frac{2k+k^2}{4}$

$$N = 1 + 3 + \dots + (k-1) = \frac{1+k-1}{2} \cdot \frac{k}{2} = \frac{k^2}{4}$$

$$\text{よって, } \frac{M-N}{M+N} = \frac{(2k+k^2) - k^2}{(2k+k^2) + k^2} = \frac{1}{k+1}$$

- (ii) k が奇数のとき $M = 2 + 4 + \dots + (k-1) = \frac{2+k-1}{2} \cdot \frac{k-1}{2} = \frac{k^2-1}{4}$

$$N = 1 + 3 + \dots + k = \frac{1+k}{2} \cdot \frac{k+1}{2} = \frac{k^2+2k+1}{4}$$

$$\text{よって, } \frac{M-N}{M+N} = \frac{(k^2-1) - (k^2+2k+1)}{(k^2-1) + (k^2+2k+1)} = -\frac{1}{k}$$

- (4) (*)より, $p_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{M-N}{M+N} (p_n - \frac{1}{2})$ と変形すると,

$$p_n - \frac{1}{2} = \left(p_1 - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{M-N}{M+N}\right)^{n-1} = \left(\frac{M}{M+N} - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{M-N}{M+N}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{M-N}{M+N}\right)^n$$

$$\text{よって, } p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{M-N}{M+N}\right)^n$$

- (i) k が偶数のとき $p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k+1}\right)^n$

- (ii) k が奇数のとき $p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{k}\right)^n$

[解 説]

頻出の確率と漸化式の融合問題です。非常に細かい誘導がついています。

3

問題のページへ

- (1) $y = \frac{x^2}{2}$ に対して $y' = x$ より、点 $P(a, \frac{a^2}{2})$ における接線の方向ベクトルの成分は $(1, a)$ となるので、法線の方程式は、

$$x - a + a(y - \frac{a^2}{2}) = 0, \quad x + ay = a + \frac{a^3}{2} \dots\dots\dots$$

同様にして、点 $Q(b, \frac{b^2}{2})$ における法線の方程式は、

$$x + by = b + \frac{b^3}{2} \dots\dots\dots$$

$$\text{より、} (a - b)y = (a - b) + \frac{1}{2}(a^3 - b^3)$$

交点 R の座標は、 $b \neq a$ から $y = \frac{1}{2}(2 + a^2 + ab + b^2)$, より $x = -\frac{1}{2}ab(a + b)$

ここで、 $b \rightarrow a$ のとき、

$$x \rightarrow -\frac{1}{2}a^2 \cdot 2a = -a^3, \quad y \rightarrow \frac{1}{2}(2 + a^2 + a^2 + a^2) = 1 + \frac{3}{2}a^2$$

よって、 $A(-a^3, 1 + \frac{3}{2}a^2)$ である。

- (2) $A(x, y)$ とすると、軌跡 C_2 は、 $x = -a^3, y = 1 + \frac{3}{2}a^2 \dots\dots$ と表せる。

さて、 $x = f(a), y = g(a)$ とおくと、

$$f(-a) = -f(a), \quad g(-a) = g(a)$$

これより、 C_2 の $a > 0$ の部分と $a < 0$ の部分は y 軸対称となる。

そこで、 $a > 0$ において、

$$\frac{dx}{da} = -3a^2, \quad \frac{dy}{da} = 3a$$

すると、 $\frac{dy}{dx} = \frac{3a}{-3a^2} = -\frac{1}{a}$ から、

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{da} \left(-\frac{1}{a}\right) \cdot \frac{da}{dx} = \frac{1}{a^2} \left(-\frac{1}{3a^2}\right) = -\frac{1}{3a^4} < 0$$

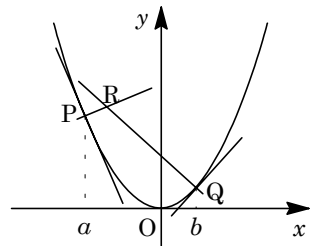
これより、軌跡 C_2 を表す曲線は上に凸である。

さらに、 $C_1: y = \frac{x^2}{2}$ との交点は、 $1 + \frac{3}{2}a^2 = \frac{1}{2}a^6$

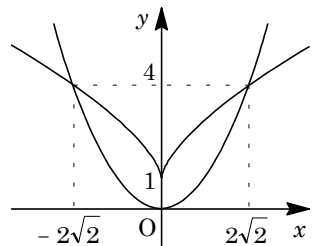
$$a^6 - 3a^2 - 2 = 0, \quad (a^2 - 2)(a^2 + 1)^2 = 0$$

よって $a = \sqrt{2}$ となり、 から $x = -2\sqrt{2}, y = 4$ である。

以上より、曲線 C_1 と軌跡 C_2 の概形は右図のようになる。また、2つの交点の座標は、 $(-2\sqrt{2}, 4), (2\sqrt{2}, 4)$ である。



a	0	...
$\frac{dx}{da}$		-
x	0	\rightarrow
$\frac{dy}{da}$		+
y	1	\nearrow



- (3) 軌跡 C_2 は、 $a = \sqrt[3]{-x}$ より、 $y = 1 + \frac{3}{2}(\sqrt[3]{-x})^2 = 1 + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$ となる。

さて、曲線 C_1 と軌跡 C_2 で囲まれた部分の面積を S とすると、 C_1 、 C_2 がともに y 軸対称より、

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^{2\sqrt{2}} \left(1 + \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = 2 \int_0^{2\sqrt{2}} \left(1 + \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} - \frac{x^2}{2} \right) dx \\ &= 2 \left[x + \frac{9}{10} x^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{6} x^3 \right]_0^{2\sqrt{2}} = 2 \left(2\sqrt{2} + \frac{18}{5} \sqrt{2} - \frac{8}{3} \sqrt{2} \right) = \frac{88}{15} \sqrt{2} \end{aligned}$$

[解 説]

(2)において、 C_2 の概形を描くときはパラメータ表示のままで処理をしましたが、(3)の設問を考えると、この段階でパラメータを消去した方がよかったかもしれません。

4

問題のページへ

(1) 条件より, $AX = Y \dots\dots$, $AY = Z \dots\dots$, $AZ = X \dots\dots$

さて, $Y = -X$ と仮定すると, より $AX = -X \dots\dots\dots$

から, $Z = A(-X) = -AX = X$ となり, に適用すると,

$AX = X \dots\dots\dots$

より, $-X = X$ から $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となり, X の大きさが 1 であることに反する。

以上より, $Y \neq -X$ である。

(2) Y, Z は大きさが 1 であり, 条件と(1)より, $Y \neq \pm X$ なので,

$$Y = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad (0 < \theta < \pi, \pi < \theta < 2\pi), \quad Z = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (0 < \varphi < 2\pi)$$

すると, $\sin \theta \neq 0$ から,

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = \left(\cos \varphi - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \sin \varphi \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

よって, Z は $Z = sX + tY$ (s, t は実数) の形にただ一通りに表せる。

(3) $Z = sX + tY$ のとき, より,

$$X = A(sX + tY) = sAX + tAY = sY + tZ = sY + t(sX + tY) = stX + (s + t^2)Y$$

すると, $(st - 1)X + (s + t^2)Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となり, (2)から,

$$st - 1 = 0, \quad s + t^2 = 0$$

よって, $s = t = -1$ から $Z = -X - Y$ となり, $X + Y + Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である。

(4) (3)から, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となり,

$$1 + \cos \theta + \cos \varphi = 0 \dots\dots\dots, \quad \sin \theta + \sin \varphi = 0 \dots\dots\dots$$

$$\text{より, } (-1 - \cos \theta)^2 + (-\sin \theta)^2 = 1, \quad 1 + 2 \cos \theta = 0$$

よって, $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ から, $\theta = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$ である。

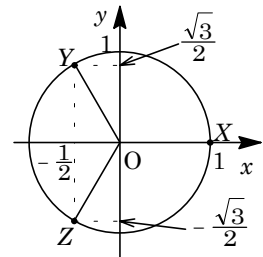
(i) $\theta = \frac{2}{3}\pi$ のとき

$$\text{より } \cos \varphi = -\frac{1}{2}, \quad \text{より } \sin \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ なので, } \varphi = \frac{4}{3}\pi$$

である。

$$\text{より, } A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2} A \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$



ここで, $\det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = 2\sqrt{3}$ より, $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}^{-1}$ は存在し,

$$A = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -3 \\ 3 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

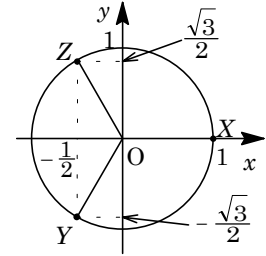
(ii) $\theta = \frac{4}{3}\pi$ のとき

より $\cos \varphi = -\frac{1}{2}$, より $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ なので, $\varphi = \frac{2}{3}\pi$ で

ある。

$$\text{より, } A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2} A \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$



ここで, $\det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} = -2\sqrt{3}$ より, $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}^{-1}$ は存在し,

$$A = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -3 \\ 3 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

[解 説]

20 年以上も前, 1 次変換の全盛期に, 京大や奈良女子大で「1 次変換の線形性」を問う問題として, 類題が出されています。初見であれば, 演習しておきたい 1 題です。

5

問題のページへ

(1) 曲線 $y = e^x$ 上を動く点 $P(x(t), y(t))$ に対して, $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = e^x \frac{dx}{dt}$

ここで, $|\vec{v}| = 1$ から, $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 1$ なので,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + e^{2x} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 1, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{1+e^{2x}}$$

$$\frac{dx}{dt} > 0 \text{ より, } \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$$

よって, $x = s$ において, $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{1+e^{2s}}}(1, e^s)$

(2) (1)より, $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dx}{dt}\right) \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2e^{2x}}{\sqrt{(1+e^{2x})^3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}} = -\frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dt}\right) \frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+e^{2x}} \left(e^x \sqrt{1+e^{2x}} - e^x \frac{2e^{2x}}{2\sqrt{1+e^{2x}}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}} \\ &= \frac{e^x(1+e^{2x}) - e^{3x}}{(1+e^{2x})^2} = \frac{e^x}{(1+e^{2x})^2} \end{aligned}$$

よって, $x = s$ において, $\vec{\alpha} = \frac{1}{(1+e^{2s})^2}(-e^{2s}, e^s)$

(3) (2)より, $|\vec{\alpha}|^2 = \frac{1}{(1+e^{2s})^4}(e^{4s} + e^{2s}) = \frac{e^{2s}}{(1+e^{2s})^4}(e^{2s} + 1) = \frac{e^{2s}}{(1+e^{2s})^3}$

ここで, $u > 0$ に対して, $f(u) = \frac{u}{(1+u)^3}$ とおくと, $|\vec{\alpha}|^2 = f(e^{2s})$ であり,

$$f'(u) = \frac{(1+u)^3 - u \cdot 3(1+u)^2}{(1+u)^6} = \frac{-2u+1}{(1+u)^4}$$

右表より, $f(u)$ は $u = \frac{1}{2}$ のとき, 最大値 $\frac{4}{27}$ をとり,

これより, $|\vec{\alpha}|$ の最大値は $\sqrt{\frac{4}{27}} = \frac{2}{9}\sqrt{3}$ である。

u	0	...	$\frac{1}{2}$...
$f'(u)$		+	0	-
$f(u)$		\nearrow	$\frac{4}{27}$	\searrow

[解 説]

大学入試ではあまり見かけない速度, 加速度を題材とした問題です。合成関数の微分法がポイントです。