

1

解答解説のページへ

座標平面に 3 点  $O(0, 0)$ ,  $A(2, 6)$ ,  $B(3, 4)$  をとり, 点  $O$  から直線  $AB$  に垂線  $OC$  を下ろす。また, 実数  $s$  と  $t$  に対し, 点  $P$  を

$$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$$

で定める。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 点  $C$  の座標を求め,  $|\overrightarrow{CP}|^2$  を  $s$  と  $t$  を用いて表せ。
- (2)  $s$  を定数として,  $t$  を  $t \geq 0$  の範囲で動かすとき,  $|\overrightarrow{CP}|^2$  の最小値を求めよ。

2

解答解説のページへ

$k$  は 2 以上の自然数とする。「1」と書かれたカードが 1 枚, 「2」と書かれたカードが 2 枚, ..., 「 $k$ 」と書かれたカードが  $k$  枚ある。そのうちの偶数が書かれたカードの枚数を  $M$ , 奇数が書かれたカードの枚数を  $N$  で表す。この  $(M+N)$  枚のカードをよくきって 1 枚を取り出し, そこに書かれた数を記録してもとに戻すという操作を  $n$  回繰り返す。記録された  $n$  個の数の和が偶数となる確率を  $p_n$  とする。次の問いに答えよ。

- (1)  $p_1$  と  $p_2$  を  $M, N$  で表せ。
- (2)  $p_{n+1}$  を  $p_n, M, N$  で表せ。
- (3)  $\frac{M-N}{M+N}$  を  $k$  で表せ。
- (4)  $p_n$  を  $n$  と  $k$  で表せ。

3

解答解説のページへ

曲線  $C_1 : y = \frac{x^2}{2}$  の点  $P(a, \frac{a^2}{2})$  における法線と点  $Q(b, \frac{b^2}{2})$  における法線の交点を  $R$  とする。ただし、 $b \neq a$  とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1)  $b$  が  $a$  に限りなく近づくとき、 $R$  はある点  $A$  に限りなく近づく。 $A$  の座標を  $a$  で表せ。
- (2) 点  $P$  が曲線  $C_1$  上を動くとき、(1) で求めた点  $A$  が描く軌跡を  $C_2$  とする。曲線  $C_1$  と軌跡  $C_2$  の概形を描き、 $C_1$  と  $C_2$  の交点の座標を求めよ。
- (3) 曲線  $C_1$  と軌跡  $C_2$  で囲まれた部分の面積を求めよ。

4

解答解説のページへ

2 次の列ベクトル  $X, Y, Z$  は大きさが 1 であり,  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  かつ  $Y \neq X$  とする。ただし, 一般に 2 次の列ベクトル  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  の大きさは  $\sqrt{x^2 + y^2}$  で定義される。また, 2 次の正方行列  $A$  が

$$AX = Y, AY = Z, AZ = X$$

を満たすとする。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1)  $Y \neq -X$  を示せ。
- (2)  $Z$  は  $Z = sX + tY$  ( $s, t$  は実数) の形にただ一通りに表せることを示せ。
- (3)  $X + Y + Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  を示せ。
- (4) 行列  $A$  を求めよ。

5

解答解説のページへ

曲線  $y = e^x$  上を動く点 P の時刻  $t$  における座標を  $(x(t), y(t))$  と表し, P の速度ベクトルと加速度ベクトルをそれぞれ  $\vec{v} = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$  と  $\vec{\alpha} = \left( \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2} \right)$  とする。すべての時刻  $t$  で  $|\vec{v}| = 1$  かつ  $\frac{dx}{dt} > 0$  であるとして, 次の問いに答えよ。

- (1) P が点  $(s, e^s)$  を通過する時刻における速度ベクトル  $\vec{v}$  を  $s$  を用いて表せ。
- (2) P が点  $(s, e^s)$  を通過する時刻における加速度ベクトル  $\vec{\alpha}$  を  $s$  を用いて表せ。
- (3) P が曲線全体を動くとき,  $|\vec{\alpha}|$  の最大値を求めよ。