

1

問題のページへ

(1) $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ に対して,

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x \cdot e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$$



$$f''(x) = \frac{e^x(e^x + 1)^2 - e^x \cdot 2(e^x + 1)e^x}{(e^x + 1)^4}$$

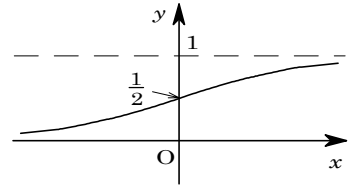
$$= -\frac{e^x(e^x - 1)}{(e^x + 1)^3}$$

また, $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$ と変形すると,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

これより, $y = 1$, $y = 0$ の 2 本の漸近線が存在し,
 $y = f(x)$ のグラフは右図のようになる。

x	...	0	...
$f'(x)$	+		+
$f''(x)$	+	0	-
$f(x)$		$\frac{1}{2}$	

(2) $y = f(x)$ $x = f^{-1}(y)$ より, $y = \frac{e^x}{e^x + 1}$ とおき, x について解くと,

$$(1 - y)e^x = y, \quad x = \log \frac{y}{1 - y} \quad (0 < y < 1)$$

よって, $f^{-1}(y) = \log \frac{y}{1 - y}$ より, $f^{-1}(x) = \log \frac{x}{1 - x}$ ($0 < x < 1$)(3) $f^{-1}\left(\frac{1}{n+2}\right) - f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right) = \log \frac{\frac{1}{n+2}}{1 - \frac{1}{n+2}} - \log \frac{\frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}} = \log \frac{1}{n+1} - \log \frac{1}{n}$ から,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ f^{-1}\left(\frac{1}{n+2}\right) - f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right) \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \log \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

$$= \log \frac{1}{e} = -1$$

[解 説]

関数のグラフに関する基本問題です。(3)で, ひとひねりがあると予測しましたが, これは, はずれてしまいました。

2

問題のページへ

- (1) 得点が 1 であるのは、1 回目に 2 以上 k 以下のカードを抜き取り、2 回目に 1 のカードを抜き取る場合より、その確率は、

$$\frac{k-1}{10} \times \frac{1}{9} = \frac{k-1}{90}$$

また、得点が 10 であるのは、1 回目に 10 のカードを抜き取る場合か、1 回目に k 以下のカードを抜き取り、2 回目に 10 のカードを抜き取る場合より、その確率は、

$$\frac{1}{10} + \frac{k}{10} \times \frac{1}{9} = \frac{k+9}{90}$$

- (2) まず、 $k \neq 9$ のとき、得点 n が k 以下の場合と、 k より大の場合に分ける。

(i) $2 \leq n \leq k$ の場合

1 回目に n を除く k 以下のカードを抜き取り、2 回目に n のカードを抜き取る場合より、その確率は、

$$\frac{k-1}{10} \times \frac{1}{9} = \frac{k-1}{90}$$

(ii) $k < n \leq 9$ の場合

1 回目に n のカードを抜き取る場合か、1 回目に k 以下のカードを抜き取り、2 回目に n のカードを抜き取る場合より、その確率は、

$$\frac{1}{10} + \frac{k}{10} \times \frac{1}{9} = \frac{k+9}{90}$$

なお、 $k=9$ のとき、得点が n である確率は、 $\frac{8}{10} \times \frac{1}{9} = \frac{4}{45}$ である。

- (3) 得点の期待値を E とすると、

$$\begin{aligned} E &= \sum_{n=1}^k n \cdot \frac{k-1}{90} + \sum_{n=k+1}^{10} n \cdot \frac{k+9}{90} = \frac{k-1}{90} \cdot \frac{k+1}{2} k + \frac{k+9}{90} \cdot \frac{10+k+1}{2} (10-k) \\ &= \frac{1}{180} (k^3 - k) + \frac{1}{180} (-k^3 - 10k^2 + 101k + 990) = \frac{1}{18} (-k^2 + 10k + 99) \end{aligned}$$

この値は、 $k=9$ のときも満たしている。

[解 説]

(2)において、 $k=9$ のときは(ii)の場合がありません。そのため、補足のコメントをつけました。

3

問題のページへ

(1) $AQ : QB = OAP : OBP = a : b$ より,

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{b\overrightarrow{OA} + a\overrightarrow{OB}}{a+b}$$

(2) $OAB = a + b - c$ より, $OQ : QP = OAB : ABP = (a + b - c) : c$ となり,

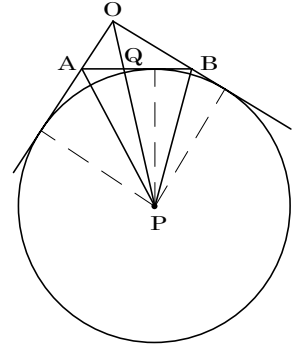
$$OQ : OP = (a + b - c) : (a + b)$$

$$\text{よって, } \overrightarrow{OP} = \frac{a+b}{a+b-c} \overrightarrow{OQ} = \frac{b\overrightarrow{OA} + a\overrightarrow{OB}}{a+b-c}$$

(3) 高さの等しい三角形の面積比は、底辺の長さの比になることより,

$$a : b : c = OA : OB : AB = 3 : 5 : 6$$

$$\text{よって, (2)より, } \overrightarrow{OP} = \frac{5\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}}{3+5-6} = \frac{5\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}}{2}$$



【解説】

(3)は、三角形の傍心のベクトル表示ですが、(2)の誘導を利用すると、計算は不要です。なお、内角や外角の二等分線の定理を用いる解も可能ですが、これは出題者の善意に反します。

4

問題のページへ

(1) まず, $f(x) = a + \log x$, $g(x) = \sqrt{x-1}$ に対し,

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

さて, 2 曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ が, $x = p$ で接するとき,

$$f(p) = g(p) \text{ より, } a + \log p = \sqrt{p-1} \dots\dots\dots$$

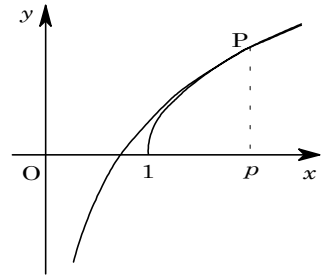
$$f'(p) = g'(p) \text{ より, } \frac{1}{p} = \frac{1}{2\sqrt{p-1}} \dots\dots\dots$$

より, $p = 2\sqrt{p-1}$, $p^2 = 4p - 4$ から $p = 2$ となり, $P(2, 1)$ である。

に代入して, $a = 1 - \log 2$

さらに, $P(2, 1)$ における接線 l は,

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 2), \quad y = \frac{1}{2}x$$



(2) $h(x) = f(x) - g(x)$ とおくと, (1)より,

$$h(x) = 1 - \log 2 + \log x - \sqrt{x-1}$$

$$h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{2\sqrt{x-1} - x}{2x\sqrt{x-1}}$$

$$= \frac{-(x-2)^2}{2x\sqrt{x-1}(2\sqrt{x-1} + x)}$$

x	1	...	2	...
$h(x)$		-	0	-
$h'(x)$	$1 - \log 2$	\searrow	0	\searrow

よって, $h(x) = 0$ の解は $x = 2$ のみであり, 2 曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ は, 点 P 以外の共有点をもたない。

(3) まず, $y = 1 - \log 2 + \log x$ に対して, $\log \frac{x}{2} = y - 1$, $x = 2e^{y-1}$

また, $y = \sqrt{x-1}$ に対して, $x = y^2 + 1$

すると, 2 曲線と x 軸で囲まれた部分の面積 S は,

$$S = \int_0^1 (y^2 + 1 - 2e^{y-1}) dy = \left[\frac{y^3}{3} + y - 2e^{y-1} \right]_0^1 = \frac{4}{3} - 2\left(1 - \frac{1}{e}\right) = \frac{2}{e} - \frac{2}{3}$$

[解 説]

(3)では, 計算を少し簡単にするために, y 軸方向に積分しています。

5

問題のページへ

$$(1) \text{ 条件より, } \sin \frac{\theta}{2} = \frac{3}{3+2} = \frac{3}{5}$$

$$\text{すると, } \cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5} \text{ となり,}$$

$$\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

$$(2) \cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{7}{25} > 0 \text{ より, } \theta \text{ は鋭角である.}$$

$$\text{さて, } \sqrt{3} < \frac{48}{25} \text{ なので } \frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{24}{25} < 1 \text{ となり,}$$

$$\sin \frac{\pi}{3} < \sin \theta < \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\text{よって, } \frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

(3) 配置できる半径 3 の円の最大個数を n とすると,

$$n\theta \quad 2\pi < (n+1)\theta, \quad n \quad \frac{2\pi}{\theta} < n+1 \dots\dots\dots (*)$$

$$\text{さて, } \alpha = \frac{2}{5}\pi \text{ とおくと, } 2\alpha = 2\pi - 3\alpha \text{ となり,}$$

$$\sin 2\alpha = -\sin 3\alpha, \quad 2\sin \alpha \cos \alpha = -3\sin \alpha + 4\sin^3 \alpha$$

$$\sin \alpha \neq 0 \text{ から, } 2\cos \alpha = -3 + 4\sin^2 \alpha, \quad 4\cos^2 \alpha + 2\cos \alpha - 1 = 0$$

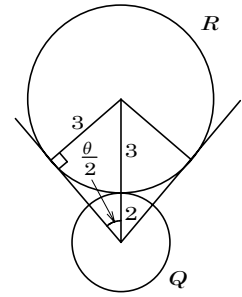
$$\cos \alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

$$\text{また, } \cos \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{24}{25}\right)^2} = \frac{7}{25} \text{ であり, } \frac{53}{25} < \sqrt{5} \text{ から, } \frac{7}{25} < \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

$$\text{よって, } \cos \theta < \cos \alpha \text{ となるので, } \theta > \alpha = \frac{2}{5}\pi \text{ から, (2) と合わせて,}$$

$$\frac{2}{5}\pi < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad 4 < \frac{2\pi}{\theta} < 5$$

すると, (*) より, 配置できる円の最大個数 n は, $n = 4$ である。



[解 説]

(2)の結論がアバウトすぎて、(3)では、そのまま利用できません。そのため、 $\frac{5}{12}\pi$ を用いて、 θ を評価しようとしたのですが、意図に反して、うまくいきません。ただ、 θ が $\frac{5}{12}\pi$ に近い値であることはわかりましたので、求める n は 4 らしいと推測はできません。しかし、決め手不在のまま、時間はどんどん経過していきます。