1

問題のページへ

(1)　$f(x)=xe^x$ に対して，$f'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$

点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ における接線の方程式は，

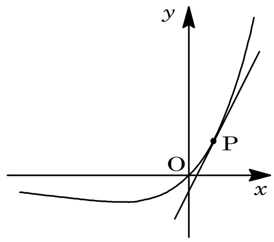
$$y-pe^p=(1+p)e^p(x-p),\ \ y=(1+p)e^px-p^2e^p$$

よって，$g(x)=(1+p)e^px-p^2e^p$ となる。

ここで，$h(x)=f(x)-g(x)$ とおくと，

$$h'(x)=f'(x)-g'(x)=(1+x)e^x-(1+p)e^p$$

$$h''(x)=e^x+(1+x)e^x=(2+x)e^x$$



x	0	$\cdots$	p	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$		↘	0	↗

$x\geqq 0$ において $h''(x)>0$ より $h'(x)$ は単調増加し，$h(x)$ の増減は右表のようになる。

したがって，$x\geqq 0$ において $h(x)\geqq 0$，すなわち $f(x)\geqq g(x)$ が成り立つ。

(2)　(1)より，$x\geqq 0$ において $f(x)\geqq g(x)$ なので，

$$S(p)=\int_0^L\{f(x)-g(x)\}dx=\int_0^L\{xe^x-(1+p)e^px+p^2e^p\}dx$$

$$=\int_0^L xe^xdx-\frac{L^2}{2}(1+p)e^p+Lp^2e^p=\int_0^L xe^xdx+\frac{L}{2}(-L-Lp+2p^2)e^p$$

$$S'(p)=\frac{L}{2}\{(-L+4p)e^p+(-L-Lp+2p^2)e^p\}$$

$$=\frac{L}{2}\{2p^2+(4-L)p-2L\}e^p$$

$$=\frac{L}{2}(2p-L)(p+2)e^p$$

p	0	$\cdots$	$\frac{L}{2}$	$\cdots$
$S'(p)$		$-$	0	$+$
$S(p)$		↘		↗

よって，$p=\dfrac{L}{2}$ のとき，$S(p)$ は最小値をとる。

[解 説]

$y=f(x)$ のグラフは，$x\geqq 0$ のとき下に凸というのが(1)の結論です。なお，明記していませんが，$p=0$ のときも同様です。

2

問題のページへ

(1) $A_2 = A_1B - BA_1 + C$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1-p & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2+p \\ -1 & -2-p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1-p & -1-p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1-p & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+p \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$A_3 = A_2B - BA_2 + C$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1+p \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1+p \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1-p & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2+2p+p^2 \\ -1 & -2-p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & p \\ -1-p & -1-p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1-p & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+p+p^2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(2) (1)より，$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1+p+\cdots+p^{n-1} \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1-p^n}{1-p} \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ と予測できるので，以下，

この予測の正しいことを数学的帰納法で証明する。

(i) $n=1$ のとき　$A_1 = A$ より，成立する。

(ii) $n=k$ のとき　$A_k = \begin{pmatrix} 1 & b_k \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$，$b_k = \dfrac{1-p^k}{1-p}$ と仮定する。

$A_{k+1} = A_kB - BA_k + C$

$$= \begin{pmatrix} 1 & b_k \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b_k \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1-p & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1+b_k(1+p) \\ -1 & -2-p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & b_k-1 \\ -1-p & -1-p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1-p & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+b_kp \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

さて，$1+b_kp = 1+\dfrac{1-p^k}{1-p}\cdot p = \dfrac{1-p^{k+1}}{1-p}$ より，$n=k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，すべての自然数 n に対して，$A_n = \begin{pmatrix} 1 & b_n \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$，$b_n = \dfrac{1-p^n}{1-p}$

以上より，$\Delta_n = -1+b_n = -1+\dfrac{1-p^n}{1-p}$ となり，$0<p<1$ より，

$$\lim_{n\to\infty}\Delta_n = -1+\frac{1}{1-p} = \frac{p}{1-p}$$

[解 説]

A_2，A_3 から A_n を予測し，それを数学的帰納法で証明するという構図になっており，その通りに計算を進めました。

3

問題のページへ

(1) $\mathrm{A}(a,\ -a,\ b)$，$\mathrm{B}(-a,\ a,\ b)$より，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-2a,\ 2a,\ 0)$

また，$\mathrm{C}(a,\ a,\ -b)$, ABの中点$\mathrm{D}(0,\ 0,\ b)$より，

$$\overrightarrow{\mathrm{DC}}=(a,\ a,\ -2b),\ \overrightarrow{\mathrm{DO}}=(0,\ 0,\ -b)$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{DC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-2a^2+2a^2=0$，$\overrightarrow{\mathrm{DO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$から，

$$\overrightarrow{\mathrm{DC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{DO}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

よって，$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{DC}=\dfrac{1}{2}\sqrt{4a^2+4a^2}\sqrt{a^2+a^2+4b^2}=2a\sqrt{a^2+2b^2}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$と$\overrightarrow{\mathrm{DO}}$のなす角$\theta$は，

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{DC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DO}}}{|\overrightarrow{\mathrm{DC}}||\overrightarrow{\mathrm{DO}}|}=\frac{2b^2}{\sqrt{a^2+a^2+4b^2}\cdot b}=\frac{2b}{\sqrt{2a^2+4b^2}}$$

よって，$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\dfrac{4b^2}{2a^2+4b^2}}=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+2b^2}}$

さて, OHは平面αに垂直なので，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{DH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(\overrightarrow{\mathrm{DO}}+\overrightarrow{\mathrm{OH}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{DO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{DH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$となり，点Hは直線CD上に存在し，

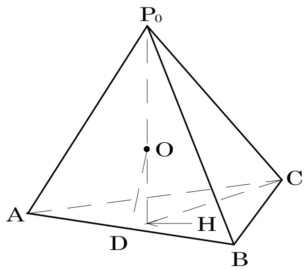
$$\mathrm{OH}=\mathrm{DO}\sin\theta=\frac{ab}{\sqrt{a^2+2b^2}}$$

(3) 球面Sの半径rは　$r=\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\sqrt{2a^2+b^2}$

ここで，HO の延長線と S との交点を$\mathrm{P_0}$とおくと，

S上の点Pと平面αの距離の最大値は$\mathrm{P_0H}$となり，

$$\mathrm{P_0H}=r+\mathrm{OH}=\sqrt{2a^2+b^2}+\frac{ab}{\sqrt{a^2+2b^2}}$$



したがって，四面体ABCPの体積の最大値は，

$$\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{P_0H}=\frac{1}{3}\cdot 2a\sqrt{a^2+2b^2}\left(\sqrt{2a^2+b^2}+\frac{ab}{\sqrt{a^2+2b^2}}\right)$$

$$=\frac{2}{3}a\left(\sqrt{(a^2+2b^2)(2a^2+b^2)}+ab\right)$$

[解 説]

図示すると，(1)の結論は明らかですが，続く設問への誘導となっています。コンパクトにまとまった1題です。

4

問題のページへ

(1)　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が異なる 2 つの実数の解をもつ条件は,

$$b^2-4ac>0,\ ac<\frac{b^2}{4}$$

ここで, $\frac{b^2}{4}\leqq\frac{6^2}{4}=9$ より, $ac\leqq 8$ となる。

(i)　$ac=1$ のとき　$(a,\ c)=(1,\ 1)$ より, 1 通りある。

(ii)　$ac=2$ のとき　$(a,\ c)=(1,\ 2),\ (2,\ 1)$ より, 2 通りある。

(iii)　$ac=3$ のとき　$(a,\ c)=(1,\ 3),\ (3,\ 1)$ より, 2 通りある。

(iv)　$ac=4$ のとき　$(a,\ c)=(1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 1)$ より, 3 通りある。

(v)　$ac=5$ のとき　$(a,\ c)=(1,\ 5),\ (5,\ 1)$ より, 2 通りある。

(vi)　$ac=6$ のとき　$(a,\ c)=(1,\ 6),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (6,\ 1)$ より, 4 通りある。

(vii) $ac=8$ のとき　$(a,\ c)=(2,\ 4),\ (4,\ 2)$ より, 2 通りある。

(2)　まず, (1)の場合のもとで, b^2-4ac が正の平方数となる b の値を求める。

(i)　$ac=1$ のとき　$b^2-4ac=b^2-4$ から, b の値はない。

(ii)　$ac=2$ のとき　$b^2-4ac=b^2-8$ より, $b=3$ となる。

(iii)　$ac=3$ のとき　$b^2-4ac=b^2-12$ より, $b=4$ となる。

(iv)　$ac=4$ のとき　$b^2-4ac=b^2-16$ より, $b=5$ となる。

(v)　$ac=5$ のとき　$b^2-4ac=b^2-20$ より, $b=6$ となる。

(vi)　$ac=6$ のとき　$b^2-4ac=b^2-24$ より, $b=5$ となる。

(vii) $ac=8$ のとき　$b^2-4ac=b^2-32$ より, $b=6$ となる。

これより, b^2-4ac が正の平方数となる $(a,\ b,\ c)$ の組の数は,

$$1\times2+1\times2+1\times3+1\times2+1\times4+1\times2=15$$

よって, 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が異なる 2 つの有理数解をもつ確率は,

$$\frac{15}{6^3}=\frac{5}{72}$$

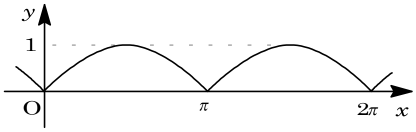
[解 説]

2 つの設問とも, ていねいな数え上げがすべてです。

5

問題のページへ

(1)　$\sin x \geqq 0$ のとき $|\sin x| = \sin x$，$\sin x < 0$ のとき $|\sin x| = -\sin x$ より，$y = |\sin x|$ のグラフは右図のようになり，基本周期は π である。



(2)　関数 $f(x)$ の周期が p より，

$$f(x+p) = f(x) \cdots\cdots\cdots ①$$

ここで，$x = -\dfrac{p}{2}$ のとき，$f\left(-\dfrac{p}{2}+p\right) = f\left(-\dfrac{p}{2}\right)$，$f\left(\dfrac{p}{2}\right) = f\left(-\dfrac{p}{2}\right) \cdots\cdots\cdots ②$

一方，$f(-x) = |\sin(-mx)|\sin(-nx) = -|\sin mx|\sin nx = -f(x)$ から，

$$f\left(-\frac{p}{2}\right) = -f\left(\frac{p}{2}\right) \cdots\cdots\cdots ③$$

②③より，$f\left(\dfrac{p}{2}\right) = f\left(-\dfrac{p}{2}\right) = 0$

さて，①より，$|\sin(mx+mp)|\sin(nx+np) = |\sin mx|\sin nx \cdots\cdots\cdots ④$

また，$f\left(\dfrac{p}{2}\right) = \left|\sin\dfrac{mp}{2}\right|\sin\dfrac{np}{2} = 0$ から，$\sin\dfrac{mp}{2} = 0$ または $\sin\dfrac{np}{2} = 0$

(i)　$\sin\dfrac{mp}{2} = 0$ のとき

k を整数として，$\dfrac{mp}{2} = k\pi$ より $mp = 2k\pi$ となり, mp は π の整数倍となる。

このとき，$|\sin(mx+mp)| = |\sin mx|$ となり，④より，

$$|\sin mx|\sin(nx+np) = |\sin mx|\sin nx$$

どんな x に対しても成立することより，$\sin(nx+np) = \sin nx$

よって, np は 2π の整数倍である。

(ii)　$\sin\dfrac{np}{2} = 0$ のとき

l を整数として，$\dfrac{np}{2} = l\pi$ より $np = 2l\pi$ となり, np は 2π の整数倍となる。

このとき，$\sin(nx+np) = \sin nx$ となり，④より，

$$|\sin(mx+mp)|\sin nx = |\sin mx|\sin nx$$

どんな x に対しても成立することより，$|\sin(mx+mp)| = |\sin mx|$

よって, mp は π の整数倍である。

(i)(ii)より, mp は π の整数倍であり, np は 2π の整数倍である。

(3)　(2)より，$mp = k\pi$，$np = 2l\pi$ より，

$$p = \frac{k\pi}{m} = \frac{2l\pi}{n},\quad kn = 2lm$$

ここで, m と n は互いに素なので, k は m の倍数となり，k' を整数として，

$$k = mk'$$

このとき，$p=\dfrac{mk'\pi}{m}=k'\pi$ となることより，周期 p は π の整数倍であり，

$$f(x+k'\pi)=\left|\sin(mx+mk'\pi)\right|\sin(nx+nk'\pi)=(-1)^{nk'}\left|\sin mx\right|\sin nx$$

(i)　n が偶数のとき

$k'=1$ として，$f(x+\pi)=f(x)$ となるので，基本周期は π である。

(ii)　n が奇数のとき

$k'=2$ として，$f(x+2\pi)=f(x)$ となるので，基本周期は 2π である。

[解　説]

(2)では $f(x)$ が奇関数であることに注目して，解の糸口をみつけました。なお，(2)の後半から，誘導はあるものの，設問の難度は著しく上昇しています。