

1

問題のページへ

(1)  $f(x) = \frac{\log x}{x}$  とおくと,  $f'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2}$

ここで,  $n \geq 1, e < 3$  から,

$$3n > ne \quad e, 0 < \frac{1}{3n} < \frac{1}{e}$$

すると, 曲線  $y = f(x)$  と直線  $y = \frac{1}{3n}$  は 2 つの  
 共有点をもつ。よって,  $f(x) = \frac{1}{3n}$  は,  $x > 0$  の範  
 囲に 2 つの実数解をもつ。

(2) まず,  $n \geq 1$  から  $e^{\frac{1}{n}} < e < ne$  となり,  $0 < x < e^{\frac{1}{n}}$   
 において  $f(x)$  は単調に増加し,  $x > ne$  において  
 $f(x)$  は単調に減少する。

さて,  $f(\alpha_n) = \frac{1}{3n} > 0 = f(1)$  であり,

$$f\left(e^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{ne^{\frac{1}{n}}} < \frac{1}{ne} < \frac{1}{3n} = f(\alpha_n)$$

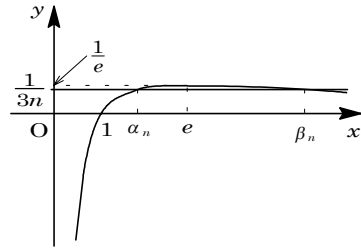
よって,  $f(1) < f(\alpha_n) < f\left(e^{\frac{1}{n}}\right)$  となり,  $1 < \alpha_n < e^{\frac{1}{n}}$  ..... (\*)

また,  $f(ne) = \frac{\log ne}{ne} < \frac{\log e}{ne} < \frac{1}{3n} = f(\beta_n)$  より,  $ne < \beta_n$  である。

ここで,  $n \rightarrow \infty$  のとき  $e^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$  なので, (\*) より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 1$$

$x$	0	...	$e$	...	
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	-	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0



[ 解 説 ]

微分法の基本問題です。(2)の不等式は, 曲線  $y = f(x)$  を見ながら立式しました。

2

問題のページへ

- (1)
- $AP : PB = \alpha : 1 - \alpha$
- より,

$$\overrightarrow{OP} = (1 - \alpha)\vec{a} + \alpha\vec{b}$$

また,  $OPB$  と直線  $AM$  に対して, メネラウスの定理を適用すると,

$$\frac{OM}{MB} \cdot \frac{BA}{AP} \cdot \frac{PQ}{QO} = 1, \quad \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{PQ}{QO} = 1$$

よって,  $PQ : QO = \alpha : 1$  から,

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{1 + \alpha} \overrightarrow{OP} = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \vec{a} + \frac{\alpha}{1 + \alpha} \vec{b}$$

- (2)
- $\overrightarrow{OR} = t\vec{a}$
- とおくと,
- $\overrightarrow{RQ} = \left(\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} - t\right)\vec{a} + \frac{\alpha}{1 + \alpha}\vec{b}$

ここで,  $\overrightarrow{AM} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$  であり,  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$  から,

$$-\left(\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} - t\right)|\vec{a}|^2 + \left\{-\frac{\alpha}{1 + \alpha} + \frac{1}{2}\left(\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} - t\right)\right\}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{1 + \alpha} |\vec{b}|^2 = 0$$

条件より,  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 3$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 3 \times \frac{1}{6} = 1$  なので, まとめると,

$$\frac{7}{2}t = \frac{7 - 14\alpha}{2(1 + \alpha)}, \quad t = \frac{1 - 2\alpha}{1 + \alpha}$$

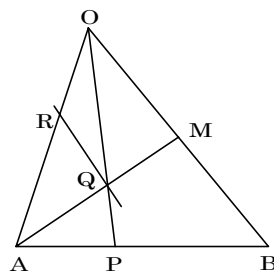
よって,  $\overrightarrow{OR} = \frac{1 - 2\alpha}{1 + \alpha}\vec{a}$

- (3) 点
- $R$
- が辺
- $OA$
- の中点であるとき,
- $\overrightarrow{OR} = \frac{1}{2}\vec{a}$
- であり, (2) から,

$$\frac{1 - 2\alpha}{1 + \alpha} = \frac{1}{2}, \quad 2 - 4\alpha = 1 + \alpha, \quad \alpha = \frac{1}{5}$$

## [ 解 説 ]

頻出のベクトルの平面図形への応用です。やや計算量が多いものの、内容は基本的です。



3

問題のページへ

(1)  $n = 3$  のとき,  $a_n$  は 3 で割り切れるが,  $b_n$  は 3 で割り切れないことを, 数学的帰納法を用いて示す。

(i)  $n = 3$  のとき  $a_1 = b_1 = 1$  より,  $a_2 = 2 \times 1 \times 1 = 2$ ,  $b_2 = 2 \times 1^2 + 1^2 = 3$  となり,

$$a_3 = 2 \times 2 \times 3 = 12, \quad b_3 = 2 \times 2^2 + 3^2 = 17$$

よって, 題意は成立する。

(ii)  $n = k$  のとき  $a_k$  は 3 で割り切れ,  $b_k$  は 3 で割り切れないと仮定する。

すなわち  $l, m$  を整数として,

$$a_k = 3l, \quad b_k = 3m \pm 1$$

このとき,  $a_{k+1} = 6l(3m \pm 1) = 3 \cdot 2l(3m \pm 1)$

$$b_{k+1} = 2 \cdot 9l^2 + (3m \pm 1)^2 = 3(6l^2 + 3m^2 \pm 2m) + 1$$

よって,  $n = k+1$  のとき, 題意は成立する。

(i)(ii)より,  $n = 3$  のとき,  $a_n$  は 3 で割り切れるが,  $b_n$  は 3 で割り切れない。

(2) まず,  $n = 2$  のとき,  $a_{n+1} = 2a_n b_n$  より,  $a_n$  は偶数である。

また,  $b_1 = 1$ ,  $b_{n+1} = 2a_n^2 + b_n^2$  より, 帰納的に  $b_n$  は奇数である。

さて,  $n = 2$  のとき  $a_n$  と  $b_n$  は互いに素であることを, 数学的帰納法を用いて示す。

(i)  $n = 2$  のとき  $a_2 = 2$ ,  $b_2 = 3$  から,  $a_2$  と  $b_2$  は互いに素である。

(ii)  $n = k$  のとき  $a_k$  と  $b_k$  は互いに素であると仮定する。

ここで,  $a_{k+1}$  と  $b_{k+1}$  が 2 以上の公約数をもつとする。すると,  $a_{k+1}$  は偶数,  $b_{k+1}$  は奇数から, この公約数は 3 以上の素数を約数としてもつ。

この素数を  $g$  とし,  $a', b'$  を整数とすると,

$$a_{k+1} = 2a_k b_k = ga' \dots\dots, \quad b_{k+1} = 2a_k^2 + b_k^2 = gb' \dots\dots$$

より,  $a_k$  と  $b_k$  のいずれかは  $g$  の倍数となる。

$a_k$  が  $g$  の倍数であるとき, より  $b_k^2$  は  $g$  の倍数, すなわち  $b_k$  は  $g$  の倍数である。

また,  $b_k$  が  $g$  の倍数であるとき, より  $2a_k^2$  は  $g$  の倍数, すなわち  $a_k$  は奇数  $g$  の倍数である。

いずれの場合も,  $a_k$  と  $b_k$  は互いに素であるという仮定に反するので,  $a_{k+1}$  と  $b_{k+1}$  は互いに素である。

(i)(ii)より,  $n = 2$  のとき,  $a_n$  と  $b_n$  は互いに素である。

### [ 解 説 ]

整数と漸化式の融合問題です。ただ, (2)の証明を考えると, (1)の結論に縛られすぎると, 時間を空費してしまいます。

4

問題のページへ

$$(1) f(x) = 0 \text{ より, } \left| \left| \sin x - \frac{1}{2} \right| - \frac{1}{2} \right| = 0, \left| \sin x - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}, \sin x - \frac{1}{2} = \pm \frac{1}{2}$$

すると,  $\sin x = 1$ ,  $\sin x = 0$  から,  $-\pi < x < \pi$  において,  $x = \frac{\pi}{2}, 0, \pm\pi$

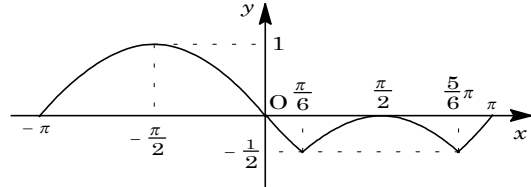
$$(2) g(x) = \left| \sin x - \frac{1}{2} \right| - \frac{1}{2} \text{ とおくと,}$$

$$(i) -\pi < x < \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi < x < \pi \text{ のとき } g(x) = -\sin x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -\sin x$$

$$(ii) \frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi \text{ のとき}$$

$$g(x) = \sin x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ = \sin x - 1$$

よって,  $y = g(x)$  のグラフの概形



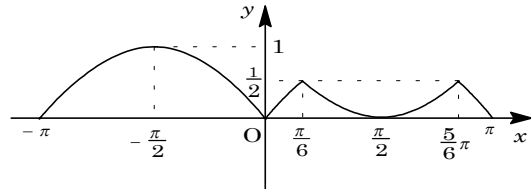
は右図のようになる。

すると,  $f(x) = |g(x)|$  から,

$$f(x) = g(x) \quad (g(x) \geq 0)$$

$$f(x) = -g(x) \quad (g(x) < 0)$$

よって,  $y = f(x)$  のグラフの概形



は右図のようになる。

$$(3) \text{ まず, } 0 < x < \frac{\pi}{6} \text{ のとき } f(x) = \sin x, \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2} \text{ のとき } f(x) = -\sin x + 1$$

また,  $y = f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$  のグラフは,  $y = f(x)$  のグラフを  $x$  軸方向に  $\frac{\pi}{2}$  だけ平行移動したものであり,  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  においては,  $f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$  となる。

$$(i) 0 < a < \frac{\pi}{6} \text{ のとき}$$

$$F(a) = \int_0^a \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} [\sin^2 x]_0^a = \frac{1}{2} \sin^2 a$$

$$(ii) \frac{\pi}{6} < a < \frac{\pi}{2} \text{ のとき}$$

$$F(a) = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin x \cos x \, dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^a (-\sin x + 1) \cos x \, dx \\ = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} [\sin^2 x]_{\frac{\pi}{6}}^a + [\sin x]_{\frac{\pi}{6}}^a = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \left( \sin^2 a - \frac{1}{4} \right) + \sin a - \frac{1}{2} \\ = -\frac{1}{2} \sin^2 a + \sin a - \frac{1}{4}$$

[ 解説 ]

絶対値つきの関数のグラフを描く問題です。丁寧な場合分けがすべてです。

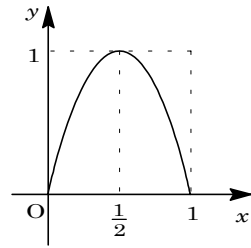
5

問題のページへ

(1) まず,  $f(x) = 4x(1-x) = -4x^2 + 4x = -4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1$

すると,  $0 \leq x \leq 1$  のとき, 最大値が  $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ , 最小値が  $f(0) = f(1) = 0$  より,  $0 \leq f(x) \leq 1$  が成り立つ。

よって, 区間  $[0, 1]$  は関数  $f(x)$  に関して不変である。



(2) (i)  $0 < a < b \leq \frac{1}{2}$  のとき

$a \leq x \leq b$  において,  $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$  が成立する。

すると, 区間  $[a, b]$  が関数  $f(x)$  に関して不変であるためには  $f(b) \leq b$ , すなわち  $-4b^2 + 4b \leq b$ ,  $b \leq \frac{3}{4}$  が必要である。

ところが, これは  $b \leq \frac{1}{2}$  に反する。

(ii)  $0 < a < \frac{1}{2} < b < 1$  のとき

$a \leq x \leq b$  において,  $f(a) \leq f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$  または  $f(b) \leq f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$  が成立する。すると, 区間  $[a, b]$  が関数  $f(x)$  に関して不変であるためには, いずれの場合も  $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq b$ , すなわち  $1 \leq b$  が必要である。

ところが, これは  $b < 1$  に反する。

(iii)  $\frac{1}{2} \leq a < b < 1$  のとき

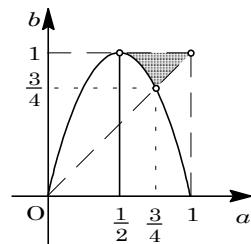
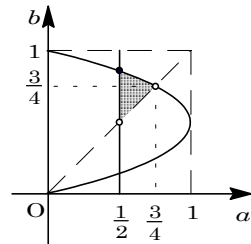
$a \leq x \leq b$  において,  $f(b) \leq f(x) \leq f(a)$  が成立するので, 区間  $[a, b]$  が関数  $f(x)$  に関して不変である条件は,  $a \leq f(b)$ ,  $f(a) \leq b$  である。

$$a \leq 4b(1-b) \dots\dots, \quad 4a(1-a) \leq b \dots\dots$$

ここで,  $ab$  平面上に  $\frac{1}{2} \leq a < b < 1$  のもとで, ① を図示すると右上図の網点部となり, ② を図示すると右下図の網点部となる。

すると, ① と ② をともに満たす  $(a, b)$  は存在しない。

(i) ~ (iii) より, 区間  $[a, b]$  は関数  $f(x)$  に関して不変ではない。



[ 解 説 ]

(iii) の場合は, 連立不等式が複雑なので, 式変形をする代わりに, 図示して処理しました。