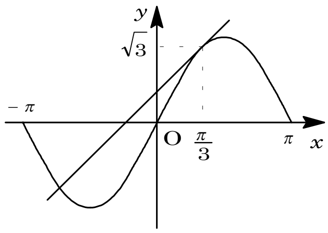
$\boxed{1}$

問題のページへ



(1) $C : y = 2\sin x$ より，$y' = 2\cos x$

ここで，$y' = 1$ とすると，$\cos x = \dfrac{1}{2}$

$-\pi \leqq x \leqq \pi$ から $x = \pm\dfrac{\pi}{3}$ となり，接点の座標は，

$$\left(\frac{\pi}{3},\ \sqrt{3}\right),\ \left(-\frac{\pi}{3},\ -\sqrt{3}\right)$$

$x = \dfrac{\pi}{3}$ のとき，接線の方程式は，

$$y - \sqrt{3} = x - \frac{\pi}{3},\quad y = x + \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

$x = -\dfrac{\pi}{3}$ のとき，接線の方程式は，$y + \sqrt{3} = x + \dfrac{\pi}{3}$，$y = x - \sqrt{3} + \dfrac{\pi}{3}$

すると, $a \geqq 0$ から，$a = \sqrt{3} - \dfrac{\pi}{3}$ である。

(2) 接線と x 軸の交点は，$y = 0$ として，$x = -\sqrt{3} + \dfrac{\pi}{3}$ となる。

よって，求める回転体の体積を V とすると，

$$V = \frac{1}{3}\pi(\sqrt{3})^2\left(\frac{\pi}{3} + \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) - \pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2\sin x)^2 dx$$

$$= \sqrt{3}\pi - 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1 - \cos 2x)\,dx = \sqrt{3}\pi - 2\pi\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{3}\pi - \frac{2}{3}\pi^2$$

[解 説]

微積分の基本問題です。穏やかな始まりです。

2

問題のページへ

(1) Eを単位行列とするとき，$\vec{p}=A\vec{p}+\vec{b}$……①より，$(E-A)\vec{p}=\vec{b}$

ここで，$E-A=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$より，$(E-A)^{-1}=2\cdot\dfrac{1}{1}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$となり，

$$\vec{p}=(E-A)^{-1}\vec{b}=2\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$

(2) 条件より，$\overrightarrow{p_{n+1}}=A\overrightarrow{p_n}+\vec{b}$………②

①②から，$\overrightarrow{p_{n+1}}-\vec{p}=A(\overrightarrow{p_n}-\vec{p})$となり，$\overrightarrow{q_n}=\overrightarrow{p_n}-\vec{p}$とおくと，

$$\overrightarrow{q_{n+1}}=A\overrightarrow{q_n}$$

(3) $A=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$に対して，ハミルトン・ケーリーの定理から，

$$A^2-A+\frac{1}{4}E=O,\ \left(A-\frac{1}{2}E\right)^2=O$$

ここで，$A-\dfrac{1}{2}E=B$とおくと，$B^2=O$から，

$$A^n=\left(\frac{1}{2}E+B\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^nE+{}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}B=\frac{1}{2^n}E+\frac{n}{2^{n-1}}B$$

$$=\frac{1}{2^n}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\frac{n}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\frac{1}{2^n}\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$$

(4) (2)より，$\overrightarrow{q_n}=A^{n-1}\overrightarrow{q_1}$から，$\overrightarrow{p_n}-\vec{p}=A^{n-1}(\overrightarrow{p_1}-\vec{p})$となり，

$$\overrightarrow{p_n}=\vec{p}+A^{n-1}(\overrightarrow{p_1}-\vec{p})=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}+\frac{1}{2^{n-1}}\begin{pmatrix}1&n-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}+\frac{1}{2^{n-1}}\begin{pmatrix}-2n+1\\-2\end{pmatrix}=\frac{1}{2^{n-1}}\begin{pmatrix}2^n-2n+1\\2^n-2\end{pmatrix}$$

[解 説]

数列と行列の融合で，頻出問題の 1 つです。(3)では，二項定理を利用しましたが，推測→帰納法でも OK です。

3

問題のページへ

(1)　2 次方程式 $z^2+tz+t=0$ ……①が異なる 2 つの虚数解をもつ条件は,

$$D=t^2-4t=t(t-4)<0$$

よって, $0<t<4$ となり，このとき①より， $z=\dfrac{-t\pm\sqrt{t^2-4t}}{2}=\dfrac{-t\pm\sqrt{-t^2+4t}\,i}{2}$

(2)　条件より， $z(t)=\dfrac{-t+\sqrt{-t^2+4t}\,i}{2}$ なので， $z(t)=x+yi$ とおくと,

$$x=-\frac{t}{2}\ \cdots\cdots\cdots②,\quad y=\frac{\sqrt{-t^2+4t}}{2}\ \cdots\cdots\cdots③$$

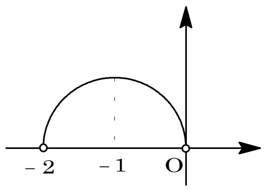
②より， $t=-2x$ となり，③に代入すると,

$$2y=\sqrt{-4x^2-8x}$$

$y>0$ で両辺を 2 乗すると， $4y^2=-4x^2-8x$

$$x^2+y^2+2x=0,\ (x+1)^2+y^2=1$$

よって，点 $z(t)$ の描く図形は，右図のようになる。



(3)　$w=\dfrac{iz}{z+1}$ より， $(z+1)w=iz$, $(w-i)z=-w$ ………④

ここで， $w=i$ とすると④は成立しないので， $w\neq i$ から， $z=\dfrac{-w}{w-i}$ ………⑤

また, (2)より，点 z は点 -1 を中心とする半径 1 の上半円を描くので,

$$|z+1|=1\ \cdots\cdots\cdots⑥,\quad |z-i|<|z+i|\ \cdots\cdots\cdots⑦$$

⑤⑥より， $\left|\dfrac{-w}{w-i}+1\right|=1$, $\left|\dfrac{-i}{w-i}\right|=1$ となり， $\dfrac{|-i|}{|w-i|}=1$ から， $|w-i|=1$

よって，点 w は点 i を中心とする半径 1 の円を描く。

⑤⑦より， $\left|\dfrac{-w}{w-i}-i\right|<\left|\dfrac{-w}{w-i}+i\right|$, $\left|\dfrac{(-1-i)w-1}{w-i}\right|<\left|\dfrac{(-1+i)w+1}{w-i}\right|$ となり,

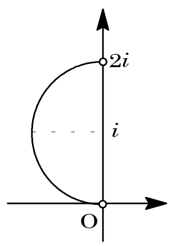
$$|(-1-i)w-1|<|(-1+i)w+1|\quad (w\neq i)$$

$|-1-i|\left|w+\dfrac{1}{1+i}\right|<|-1+i|\left|w+\dfrac{1}{-1+i}\right|$ から， $\sqrt{2}\left|w-\dfrac{-1+i}{2}\right|<\sqrt{2}\left|w-\dfrac{1+i}{2}\right|$

$$\left|w-\frac{-1+i}{2}\right|<\left|w-\frac{1+i}{2}\right|$$

よって，点 w は 2 点 $\dfrac{-1+i}{2}$, $\dfrac{1+i}{2}$ を結ぶ直線すなわち虚軸の左側にある。

以上まとめて，点 w の描く図形は，右図のようになる。



[解 説]

複素数と軌跡に関する頻出タイプの問題です。なお，軌跡の限界である z の虚部が正という条件は，⑦で数式化しています。

4

問題のページへ

(1)　不等式 $\log_2\left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq 1$ に対し，$\left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right]>0\ \left(\frac{5}{2}+\cos\theta\geqq 1\right)$ のもとで，

$$\left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq 2,\ 1\leqq\frac{5}{2}+\cos\theta<3$$

すると，$-\frac{3}{2}\leqq\cos\theta<\frac{1}{2}$ となり，$0<\theta<\pi$ の範囲では，

$$\frac{\pi}{3}<\theta<\pi$$

(2)　不等式 $\left[\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]\geqq 1$ に対し，$\sin\theta>0$ のもとで，

$$\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta\geqq 1,\ \log_2\sin\theta\geqq-\frac{1}{2}$$

すると，$\sin\theta\geqq\frac{1}{\sqrt{2}}$ となり，$0<\theta<\pi$ の範囲では，

$$\frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{3}{4}\pi$$

(3)　不等式 $\log_2\left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq\left[\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]$……(＊)に対して，$0<\theta<\pi$ の範囲では，$\left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right]>0$ および $\sin\theta>0$ は成立している。

ここで，$-1<\cos\theta<1$ より，$\frac{3}{2}<\frac{5}{2}+\cos\theta<\frac{7}{2}$ となるので，

$$\left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right]=1,\ 2,\ 3$$

また，$0<\sin\theta\leqq 1$ より，$\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta\leqq\frac{3}{2}$ となるので，$\left[\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]\leqq 1$

(i)　$\left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right]=1\ \left(\frac{3}{2}<\frac{5}{2}+\cos\theta<2\right)$ のとき

まず，$-1<\cos\theta<-\frac{1}{2}$ より，$\frac{2\pi}{3}<\theta<\pi$ ………①

(＊)より，$0\leqq\left[\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]$ となり，

$$\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta\geqq 0,\ \log_2\sin\theta\geqq-\frac{3}{2},\ \sin\theta\geqq\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

条件から，$\sin\alpha=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ なので，$0<\theta<\pi$ の範囲では，

$$\alpha\leqq\theta\leqq\pi-\alpha\ \text{………②}$$

ここで，$\sin\frac{2\pi}{3}>\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ から，$\frac{2\pi}{3}<\pi-\alpha$ となるので，

①②より，求める θ の範囲は，$\frac{2\pi}{3}<\theta\leqq\pi-\alpha$ である。

(ii)　$\left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right]=2\ \left(2\leqq\frac{5}{2}+\cos\theta<3\right)$ のとき

まず，$-\frac{1}{2}\leqq\cos\theta<\frac{1}{2}$ より，$\frac{\pi}{3}<\theta\leqq\frac{2\pi}{3}$ ………③

(＊)より，$1\leqq\left[\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]$ となり，(2)より $\frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{3}{4}\pi$ ………④

③④より，求めるθの範囲は，$\frac{\pi}{3}<\theta\leqq\frac{2\pi}{3}$である。

(iii) $\left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right]=3\ \left(3\leqq\frac{5}{2}+\cos\theta<\frac{7}{2}\right)$のとき

まず，$\frac{1}{2}\leqq\cos\theta<1$より，$0<\theta\leqq\frac{\pi}{3}$

(＊)より，$\log_2 3\leqq\left[\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]$となるが，$\left[\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]\leqq 1$に反する。

(i)～(iii)より，求めるθの範囲は，$\frac{\pi}{3}<\theta\leqq\pi-\alpha$である。

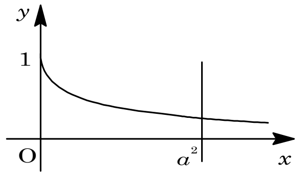
[解 説]

ガウス記号つきの不等式ですが，それに三角関数，対数関数が混在し，盛りだくさんです。(1)と(2)，および(3)の一部が文系と共通です。

5

問題のページへ

(1)　t が $t \geqq 0$ で変化するとき，$x = t^2$，$y = e^{-t}$ の描く曲線 C と x 軸，y 軸，および直線 $x = a^2$ で囲まれる部分の面積 $S(a)$ は，



$$S(a) = \int_0^{a^2} y\,dx = \int_0^a e^{-t} \cdot 2t\,dt$$
$$= -2\Big[\, te^{-t} \,\Big]_0^a + 2\int_0^a e^{-t}\,dt$$
$$= -2ae^{-a} - 2\Big[\, e^{-t} \,\Big]_0^a = -2(a+1)e^{-a} + 2$$

(2)　$a > 0$ の範囲で, (1)より，$S'(a) = 2ae^{-a} > 0$

これより，$S(a)$ は単調に増加する。

さらに，$\lim\limits_{a\to\infty} ae^{-a} = 0$ より，

$$\lim_{a\to\infty} S(a) = \lim_{a\to\infty}\left\{-2(a+1)e^{-a} + 2\right\} = 2$$

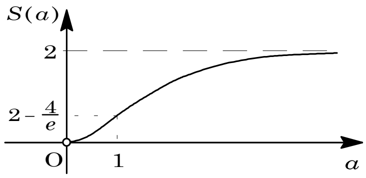
また，凹凸については，

$$S''(a) = 2e^{-a} - 2ae^{-a} = 2(1-a)e^{-a}$$

まとめると，右上の表となる。

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$S''(a)$		$+$		$-$
$S(a)$	0	$\cup$	$2-\dfrac{4}{e}$	$\cap$

以上より，$S(a)$ のグラフの概形は右図のようになる。



(3)　$F(a) = S(a) - 1.35$ とおくと，$\dfrac{5}{2} < e < 3$ から，

$$F(2) = S(2) - 1.35 = -\frac{6}{e^2} + 0.65 < -6\cdot\frac{1}{9} + 0.65 = -\frac{2}{3} + 0.65 < 0$$
$$F(3) = S(3) - 1.35 = -\frac{8}{e^3} + 0.65 > -8\cdot\frac{8}{125} + 0.65 = -\frac{64}{125} + 0.65 > 0$$

よって，$F(a) = 0$ は $2 < a < 3$ の範囲に解をもつ。すなわち，$S(a) = 1.35$ となる a は $2 < a < 3$ の範囲に存在する。

[解 説]

第 1 問と同じく，微積分の基本問題です。穏やかな終わりです。