1

解答解説のページへ

直線$l : y = x + a$が曲線$C : y = 2\sin x$ $(-\pi \leqq x \leqq \pi)$に接しているとき，次の問いに答えよ。ただし, $a \geqq 0$ とする。

(1) a の値を求めよ。

(2) 曲線 C と直線 l で囲まれた図形の $y \geqq 0$ の範囲にある部分を，x 軸のまわりに回転する。この回転体の体積を求めよ。

2

解答解説のページへ

行列 A と列ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ を

$$A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \vec{a}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

とし，列ベクトル $\overrightarrow{p_n}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を

$$\overrightarrow{p_1}=\vec{a},\ \overrightarrow{p_{n+1}}=A\overrightarrow{p_n}+\vec{b}\quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

で定める。このとき次の問いに答えよ。

(1) $\vec{p}=A\vec{p}+\vec{b}$ を満たす列ベクトル $\vec{p}$ を求めよ。

(2) $\overrightarrow{q_n}=\overrightarrow{p_n}-\vec{p}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ とおく。$\overrightarrow{q_{n+1}}$ と $\overrightarrow{q_n}$ の間に成り立つ関係式を求めよ。

(3) $n=1,\ 2,\ \cdots$ に対して A^n を求めよ。

(4) $\overrightarrow{p_n}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を求めよ。

3　　解答解説のページへ

t を実数とするとき, 2 次方程式 $z^2+tz+t=0$ について，次の問いに答えよ。

(1)　この 2 次方程式が異なる 2 つの虚数解をもつような t の範囲と，そのときの虚数解をすべて求めよ。

(2)　(1)の虚数解のうち，その虚部が正のものを $z(t)$ で表す。t が(1)で求めた範囲を動くとき，複素数平面上で点 $z(t)$ が描く図形 C を求め，図示せよ。

(3)　複素数平面上で，点 z が(2)の図形 C 上を動くとき，$w=\dfrac{iz}{z+1}$ で表される点 w が描く図形を求め，図示せよ。

4

解答解説のページへ

実数 x に対して，$[x]$は x を超えない最大の整数を表す。たとえば，$\left[\frac{3}{2}\right]=1$，$[2]=2$ である。このとき，$0<\theta<\pi$ として次の問いに答えよ。ただし，必要なら $\sin\alpha=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ となる角 α $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$を用いてよい。

(1)　不等式 $\log_2\left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ。

(2)　不等式 $\left[\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]\geqq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ。

(3)　不等式 $\log_2\left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq\left[\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]$ を満たす θ の範囲を求めよ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

実数 t が $t \geqq 0$ の範囲を動くとき，xy 平面上で点 $\mathrm{P}(t^2,\ e^{-t})$ が描く曲線を C とする。a を正の実数とし，曲線 C と x 軸，y 軸，および直線 $x=a^2$ で囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする。このとき次の問いに答えよ。

(1) 面積 $S(a)$ を求めよ。

(2) $a>0$ の範囲で関数 $S(a)$ の増減，凹凸を調べ，そのグラフの概形を描け。ただし，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} ae^{-a}=0$ であることを用いてよい。

(3) $S(a)=1.35$ となる a が $2<a<3$ の範囲に存在することを示せ。ただし，必要なら $2.5<e<3$ であることを用いてよい。