1

問題のページへ

(1) $I_0=\dfrac{(-1)^0}{0!}\displaystyle\int_0^2 x^0e^x dx=\int_0^2 e^x dx=\Big[e^x\Big]_0^2=e^2-1$

また，$I_n=\dfrac{(-1)^n}{n!}\displaystyle\int_0^2 x^ne^x dx=\dfrac{(-1)^n}{n!}\left\{\Big[x^ne^x\Big]_0^2-\int_0^2 nx^{n-1}e^x dx\right\}$

$$=\frac{(-1)^n}{n!}2^ne^2-\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\int_0^2 x^{n-1}e^x dx=\frac{(-1)^n2^ne^2}{n!}+I_{n-1}$$

すると，$I_1=\dfrac{-2e^2}{1!}+(e^2-1)=-e^2-1$，$I_2=\dfrac{4e^2}{2!}+(-e^2-1)=e^2-1$ より，

$$I_3=\frac{-8e^2}{3!}+(e^2-1)=-\frac{1}{3}e^2-1$$

(2) $0\leqq x\leqq 2$ に対して $e^x\leqq e^2$ より，

$$\frac{1}{n!}\int_0^2 x^ne^x dx\leqq\frac{1}{n!}\int_0^2 x^ne^2 dx=\frac{e^2}{n!}\Big[\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big]_0^2=\frac{2^{n+1}e^2}{(n+1)!}$$

ここで, $n\geqq 2$ のとき,

$$\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{2^2}{1\cdot 2}\cdot\frac{2^{n-1}}{3\cdot 4\cdot 5\cdot\cdots\cdot(n+1)}\leqq 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\cdots\cdots\cdots(*)$$

なお，$n=1$ のときも $\dfrac{2^2}{2!}=2\left(\dfrac{2}{3}\right)^0$ となり, $(*)$は成立している。

よって，$\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^2 x^ne^x dx\leqq 2e^2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

(3) (1)から，$I_n-I_{n-1}=\dfrac{(-1)^n2^ne^2}{n!}$ より，$\dfrac{(-1)^n2^n}{n!}=\dfrac{1}{e^2}(I_n-I_{n-1})$　$(n\geqq 1)$

$$\sum_{k=1}^n\frac{(-1)^k2^k}{k!}=\frac{1}{e^2}\sum_{k=1}^n(I_k-I_{k-1})=\frac{1}{e^2}(I_n-I_0)=\frac{1}{e^2}(I_n-e^2+1)$$

よって，$\displaystyle\sum_{k=0}^n\frac{(-1)^k2^k}{k!}=1+\frac{1}{e^2}(I_n-e^2+1)=\frac{1}{e^2}(I_n+1)$

さて, (2)より，$|I_n|=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^2 x^ne^x dx\leqq 2e^2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$n\to\infty$のとき，$|I_n|\to 0$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n=0$ となり,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^n\frac{(-1)^k2^k}{k!}=\frac{1}{e^2}$$

[解 説]

(3)が本題ですが，それを解くのに無理が生じないように, (1)と(2)が設けられています。配慮の深い問題です。

2

問題のページへ

(1)　二項定理より，$(a+b)^4={}_4\mathrm{C}_0a^4+{}_4\mathrm{C}_1a^3b+{}_4\mathrm{C}_2a^2b^2+{}_4\mathrm{C}_3ab^3+{}_4\mathrm{C}_4b^4$

$$=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

$$(a-b)^4=\{a+(-b)\}^4=a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$$

(2)　まず，$a+b=s$，$a-b=t$ とおくと，$a=\dfrac{1}{2}(s+t)$，$b=\dfrac{1}{2}(s-t)$ より，

$$A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}s+t & s-t\\ s-t & s+t\end{pmatrix}$$

これより，$A^2=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}s+t & s-t\\ s-t & s+t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s+t & s-t\\ s-t & s+t\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}s^2+t^2 & s^2-t^2\\ s^2-t^2 & s^2+t^2\end{pmatrix}$

$$A^4=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}s^2+t^2 & s^2-t^2\\ s^2-t^2 & s^2+t^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s^2+t^2 & s^2-t^2\\ s^2-t^2 & s^2+t^2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}s^4+t^4 & s^4-t^4\\ s^4-t^4 & s^4+t^4\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}(a+b)^4+(a-b)^4 & (a+b)^4-(a-b)^4\\ (a+b)^4-(a-b)^4 & (a+b)^4+(a-b)^4\end{pmatrix}$$

(3)　(2)から，$A^n=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}s^n+t^n & s^n-t^n\\ s^n-t^n & s^n+t^n\end{pmatrix}$ と予測できるので，これを数学的帰納法によって証明する。

(i)　$n=1$ のとき　明らかに成立する。

(ii)　$n=k$ のとき　$A^k=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}s^k+t^k & s^k-t^k\\ s^k-t^k & s^k+t^k\end{pmatrix}$ と仮定する。

$$A^{k+1}=A^kA=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}s^k+t^k & s^k-t^k\\ s^k-t^k & s^k+t^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s+t & s-t\\ s-t & s+t\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2(s^{k+1}+t^{k+1}) & 2(s^{k+1}-t^{k+1})\\ 2(s^{k+1}-t^{k+1}) & 2(s^{k+1}+t^{k+1})\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}s^{k+1}+t^{k+1} & s^{k+1}-t^{k+1}\\ s^{k+1}-t^{k+1} & s^{k+1}+t^{k+1}\end{pmatrix}$$

よって，$n=k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，$A^n=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}(a+b)^n+(a-b)^n & (a+b)^n-(a-b)^n\\ (a+b)^n-(a-b)^n & (a+b)^n+(a-b)^n\end{pmatrix}$

(4)　$b=1-a$ なので, (3)より，$x_n=\dfrac{1}{2}\{(a+b)^n+(a-b)^n\}=\dfrac{1}{2}\{1+(2a-1)^n\}$

$0<a<1$ から，$-1<2a-1<1$ となり, $n\to\infty$ のとき $(2a-1)^n\to 0$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$

[解 説]

(1)を(2)の誘導とすれば, (2)において置き換え s, t は不要でした。後から気付きました。

3

問題のページへ

(1)　$x(t)=\cos\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)$，$y(t)=\cos 2t$ に対して $(x(t),\ y(t))=(0,\ 0)$ とすると，

$$\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)=0\ \cdots\cdots\cdots①,\quad \cos 2t=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

$0\leqq t<2\pi$ なので，①より $t+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$ となり，$t=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{5}{4}\pi$

②より $2t=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{5}{2}\pi,\ \dfrac{7}{2}\pi$ となり，$t=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$

①②をともに満たすのは，$t=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{5}{4}\pi$ のときである。

さて，速度ベクトル $\vec{v}$ は，$\vec{v}=(x'(t),\ y'(t))=\left(-\sin\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right),\ -2\sin 2t\right)$ より，$t=\dfrac{\pi}{4}$ のとき $\vec{v}=(-1,\ -2)$，$t=\dfrac{5}{4}\pi$ のとき $\vec{v}=(1,\ -2)$ となる。

(2)　$0\leqq t<2\pi$ に対して，$x(\pi+t)=\cos\left(\pi+t+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\cos\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)=-x(t)$

$$y(\pi+t)=\cos 2(\pi+t)=\cos 2t=y(t)$$

よって，曲線 C の $0\leqq t\leqq\pi$ の部分と，$\pi\leqq t\leqq 2\pi$ の部分とは y 軸対称である。

さて，$x(2\pi+t)=x(t)$，$y(2\pi+t)=y(t)$ なので，$0\leqq t\leqq 2\pi$ における曲線 C と $-\dfrac{\pi}{4}\leqq t\leqq\dfrac{7}{4}\pi$ における曲線 C とは一致する。

そこで，$-\dfrac{\pi}{4}\leqq t\leqq\dfrac{7}{4}\pi$ に対して，$x(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos t-\sin t)$ と変形すると，

$$x\left(\frac{3}{2}\pi-t\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left(\frac{3}{2}\pi-t\right)-\sin\left(\frac{3}{2}\pi-t\right)\right\}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t+\cos t)=x(t)$$

$$y\left(\frac{3}{2}\pi-t\right)=\cos 2\left(\frac{3}{2}\pi-t\right)=\cos(3\pi-2t)=-\cos 2t=-y(t)$$

よって，曲線 C の $-\dfrac{\pi}{4}\leqq t\leqq\dfrac{3}{4}\pi$ の部分と，$\dfrac{3}{4}\pi\leqq t\leqq\dfrac{7}{4}\pi$ の部分とは x 軸対称である。

(3)　(1)より，

$$x'(t)=-\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$$

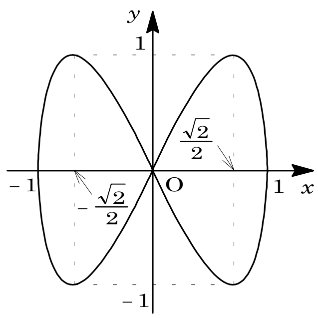
$$y'(t)=-2\sin 2t$$

曲線 C の $-\dfrac{\pi}{4}\leqq t\leqq\dfrac{3}{4}\pi$ に対する $(x(t),\ y(t))$ の増減は右表のようになる。

t	$-\dfrac{\pi}{4}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{3}{4}\pi$
$x'(t)$	0	$-$		$-$		$-$	
$x(t)$	1	↘	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	↘	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	↘	-1
$y'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$y(t)$	0	↗	1	↘	-1	↗	0

また(2)より，$\dfrac{3}{4}\pi\leqq t\leqq\dfrac{7}{4}\pi$ の部分は，$-\dfrac{\pi}{4}\leqq t\leqq\dfrac{3}{4}\pi$ の部分を x 軸対称すると得られるので，$-\dfrac{\pi}{4}\leqq t\leqq\dfrac{7}{4}\pi$ すなわち $0\leqq t<2\pi$ における C の概形は次の図のようになる。

(4)　曲線 C の $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ の部分は，$-\dfrac{\pi}{4} \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{4}$ に対応する。そこで，C が囲む図形の面積を S とすると，対称性から，



$$S = 4\int_0^1 y\,dx = 4\int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} -\cos 2t \sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)dt$$

$$= 4\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2t \sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)dt$$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left\{\sin\left(3t+\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right\}dt$$

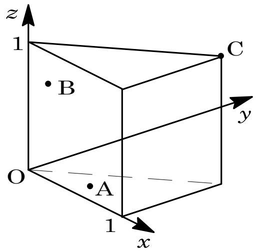
$$= 2\left[-\frac{1}{3}\cos\left(3t+\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{2}{3}(-1-0) + 2(1-0) = \frac{8}{3}$$

[解 説]

(2)の設問において，y 軸対称はすぐに示せますが，x 軸対称を示すのは一筋縄ではいきません。$x(t)$ を加法定理で展開し，しかも曲線をラフに描いて方針を決めました。

4

問題のページへ



(1)　求める単位ベクトルを $\vec{e}=(x,\ y,\ z)$ とおく。

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\vec{e}=0$ より，$ax+by=0$ ………①

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\vec{e}=0$ より，$x+y+z=0$ ………②

①より，$(x,\ y)=k(b,\ -a)$（k は実数）

②から，$z=-x-y$ なので，

$$(x,\ y,\ z)=k(b,\ -a,\ a-b)$$

$|\vec{e}|=1$ より，$1=|k|\sqrt{b^2+(-a)^2+(a-b)^2}$ から，

$$k=\pm\frac{1}{\sqrt{b^2+(-a)^2+(a-b)^2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{2(a^2+b^2-ab)}}$$

よって，$\vec{e}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2(a^2+b^2-ab)}}(b,\ -a,\ a-b)$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\vec{e}=\pm\dfrac{bc+ad-bd}{\sqrt{2(a^2+b^2-ab)}}$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\vec{e}|=\dfrac{|bc+ad-bd|}{\sqrt{2(a^2+b^2-ab)}}$

ここで，$a\geqq b\geqq 0$，$c\geqq 0$，$d\geqq 0$ なので，$bc+ad-bd=bc+d(a-b)\geqq 0$ となり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\vec{e}|=\frac{bc+ad-bd}{\sqrt{2(a^2+b^2-ab)}}$$

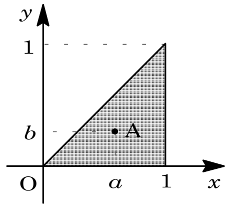
(2)　四面体 OABC において，△OAC を底面とすると，高さは $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\vec{e}|$ となる。

$$\triangle\mathrm{OAC}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{3(a^2+b^2)-(a+b)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2-ab)}$$

四面体 OABC の体積を V とすると，(1)より，

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2-ab)}\cdot\frac{bc+ad-bd}{\sqrt{2(a^2+b^2-ab)}}=\frac{1}{6}(bc+ad-bd)$$

(3)　まず，点 $\mathrm{A}(a,\ b,\ 0)$ の位置を S 内でいったん固定した後，点 $\mathrm{B}(c,\ 0,\ d)$ を T 内で動かし，V が最大になるときの点 B の位置を求める。次に，この状態を保ったまま，点 A を S 内で動かし，V の最大値を求める。



なお，$a=b=0$ のときは，点 A が原点 O と一致するので不適である。

(i)　点 $\mathrm{A}(a,\ b,\ 0)$ を $a>b>0$ の位置に固定したとき

$V=\dfrac{1}{6}\{(a-b)d+bc\}$ となるので，V は d の単調増加関数であり，$0\leqq d\leqq 1$，$0\leqq c\leqq 1$ より，$c=d=1$ のとき V は最大になる。

このとき，$V=\dfrac{1}{6}(a-b+b)=\dfrac{1}{6}a$ である。

そこで，点 A を S 内で動かすと, V は $a=1$ で最大となり，その値は $\dfrac{1}{6}$ である。

よって，$a=c=d=1$，$0<b<1$ のとき, V は最大値 $\dfrac{1}{6}$ をとる。

(ii) 点 $\mathrm{A}(a,\ b,\ 0)$ を $a>b=0$ の位置に固定したとき

$V=\dfrac{1}{6}ad$ となるので，V は d の単調増加関数であり，$0\leqq d\leqq 1$ より，$d=1$ のとき V は最大になる。このとき $V=\dfrac{1}{6}a$ である。

そこで，点 A を S 内で動かすと, V は $a=1$ で最大となり，その値は $\dfrac{1}{6}$ である。

よって，$a=d=1$，$b=0$，$0\leqq c\leqq 1$ のとき, V は最大値 $\dfrac{1}{6}$ をとる。

(iii) 点 $\mathrm{A}(a,\ b,\ 0)$ を $a=b>0$ の位置に固定したとき

$V=\dfrac{1}{6}bc$ となるので, V は c の単調増加関数であり，$0\leqq c\leqq 1$ より，$c=1$ のとき V は最大になる。このとき $V=\dfrac{1}{6}b$ である。

そこで，点 A を S 内で動かすと, V は $b=1$ で最大となり，その値は $\dfrac{1}{6}$ である。

よって，$a=b=c=1$，$0\leqq d\leqq 1$ のとき, V は最大値 $\dfrac{1}{6}$ をとる。

(i)(ii)(iii)より, V の最大値は $\dfrac{1}{6}$，このときの点 A, B の位置は次の 3 種類である。

$\mathrm{A}(1,\ b,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0,\ 1)$　$(0<b<1)$
$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(c,\ 0,\ 1)$　$(0\leqq c\leqq 1)$
$\mathrm{A}(1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0,\ d)$　$(0\leqq d\leqq 1)$

[解 説]

(2)までは 1999 年に類題が出ています。ただ，(3)の最大値を求めるときに，いわゆる「予選→決勝戦」という 1 文字固定の解法を用いる必要があります。上の解では条件のきつい点 A をとりあえず固定し，点 B を動かすという方法で解きました。

5

問題のページへ

(1) n 個の電球を左から $L_1 \sim L_n$ とすると，色のパターンは 2^n 通りできる。

L_1 が赤のとき，色の変化が 1 回だけなのは，赤→青の変化が起こった後は色の変化がない場合である。すると，初めて青になる電球は $L_2 \sim L_n$ のいずれかなので，この場合は ${}_{n-1}C_1$ 通りある。

よって，左端が赤色で色の変化が 1 回だけ起きる確率は，$\dfrac{{}_{n-1}C_1}{2^n} = \dfrac{n-1}{2^n}$ である。

(2) (1)と同様に，L_1 が青のとき色の変化が 1 回だけの確率は $\dfrac{n-1}{2^n}$ であり，合わせて $\dfrac{n-1}{2^n} \times 2 = \dfrac{n-1}{2^{n-1}}$ となる。

また，色の変化のない確率は，明らかに $\dfrac{1}{2^n} \times 2 = \dfrac{1}{2^{n-1}}$ である。

よって，色の変化が少なくとも 2 回起きる確率は，

$$1 - \left(\frac{n-1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}} \right) = 1 - \frac{n}{2^{n-1}}$$

(3) (1)と同様に，L_1 が赤のとき，色の変化が m 回起きる確率は $\dfrac{{}_{n-1}C_m}{2^n}$ である。

L_1 が青の場合も同じ確率なので，色の変化がちょうど m 回起きる確率を $P(m)$ とすると，

$$P(m) = \frac{{}_{n-1}C_m}{2^n} \times 2 = \frac{{}_{n-1}C_m}{2^{n-1}}$$

(4) 色の変化の回数の期待値を E とすると，

$$E = \sum_{m=0}^{n-1} mP(m) = \sum_{m=0}^{n-1} m \cdot \frac{{}_{n-1}C_m}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{m(n-1)!}{m!(n-1-m)!}$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{m(n-1)!}{m!(n-1-m)!} = \frac{n-1}{2^{n-1}} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{(n-2)!}{(m-1)!(n-1-m)!}$$

$$= \frac{n-1}{2^{n-1}} \sum_{m=1}^{n-1} {}_{n-2}C_{m-1} = \frac{n-1}{2^{n-1}} \cdot (1+1)^{n-2} = \frac{n-1}{2}$$

[解 説]

$n = 6$ の場合が，文系で出題されています。なお，(4)は実質的に，組合せの公式 $k\ {}_nC_k = n\ {}_{n-1}C_{k-1}$ を用いています。