

1

問題のページへ

(1) $x = e^{-t} \cos t$, $y = e^{-t} \sin t$ より,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -e^{-t}(\sin t + \cos t) \\ &= -\sqrt{2} e^{-t} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -e^{-t}(\sin t - \cos t) \\ &= -\sqrt{2} e^{-t} \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

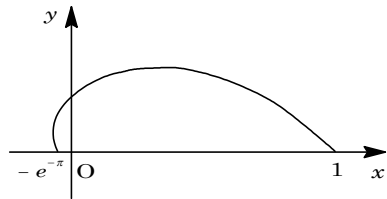
$$t = \frac{1}{4}\pi \text{ のとき } \left(\frac{e^{-\frac{1}{4}\pi}}{\sqrt{2}}, \frac{e^{-\frac{1}{4}\pi}}{\sqrt{2}} \right),$$

$$t = \frac{3}{4}\pi \text{ のとき } \left(-\frac{e^{-\frac{3}{4}\pi}}{\sqrt{2}}, \frac{e^{-\frac{3}{4}\pi}}{\sqrt{2}} \right) \text{ となるので, } x \text{ の}$$

$$\text{最小値は } -\frac{e^{-\frac{3}{4}\pi}}{\sqrt{2}} \text{ (} t = \frac{3}{4}\pi \text{), } y \text{ の最大値は } \frac{e^{-\frac{1}{4}\pi}}{\sqrt{2}}$$

($t = \frac{1}{4}\pi$) である。

t	0	...	$\frac{1}{4}\pi$...	$\frac{3}{4}\pi$...	π
$\frac{dx}{dt}$		-		-	0	+	
x	1	↘		↘		↗	$-e^{-\pi}$
$\frac{dy}{dt}$		+	0	-		-	
y	0	↗		↘		↘	0

(2) $I = \int_0^{\pi} \{r(t)\}^2 r'(t) \sin^2 t \cos t dt$

$$= \left[\frac{1}{3} \{r(t)\}^3 \sin^2 t \cos t \right]_0^{\pi} - \frac{1}{3} \int_0^{\pi} \{r(t)\}^3 (2 \sin t \cos^2 t - \sin^3 t) dt$$

$$= -\frac{1}{3} \int_0^{\pi} \{r(t)\}^3 \{2 \sin t (1 - \sin^2 t) - \sin^3 t\} dt = \int_0^{\pi} \{r(t)\}^3 \left(\sin^3 t - \frac{2}{3} \sin t \right) dt$$

(3) x の最小値を x_0 とおくと, (2) より,

$$V = \int_{x_0}^1 \pi y^2 dx - \int_{x_0}^{-e^{-\pi}} \pi y^2 dx = \pi \int_{\frac{3}{4}\pi}^0 y^2 \frac{dx}{dt} dt - \pi \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} y^2 \frac{dx}{dt} dt$$

$$= -\pi \int_0^{\pi} y^2 \frac{dx}{dt} dt = -\pi \int_0^{\pi} \{r(t)\}^2 \sin^2 t \{r'(t) \cos t - r(t) \sin t\} dt$$

$$= -\pi \int_0^{\pi} \{r(t)\}^2 r'(t) \sin^2 t \cos t dt + \pi \int_0^{\pi} \{r(t)\}^3 \sin^3 t dt$$

$$= -\pi \int_0^{\pi} \{r(t)\}^3 \left(\sin^3 t - \frac{2}{3} \sin t \right) dt + \pi \int_0^{\pi} \{r(t)\}^3 \sin^3 t dt$$

$$= \frac{2}{3} \pi \int_0^{\pi} \{r(t)\}^3 \sin t dt = \frac{2}{3} \pi \int_0^{\pi} e^{-3t} \sin t dt$$

[解 説]

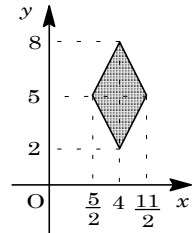
パラメータ曲線を題材とした微積分の基本的な問題です。(3)の計算も, (2)を利用すれば繁雑ではありません。

2

問題のページへ

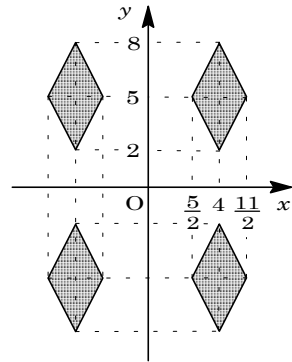
- (1) 不等式 $2|x|+|y| \leq 3$ の表す領域は、4点 $(\frac{3}{2}, 0), (0, 3), (-\frac{3}{2}, 0), (0, -3)$ を結んでできるひし形の内部または辺上である。

これより、不等式 $2|x-4|+|y-5| \leq 3$ の表す領域は、
 の領域を x 軸方向に 4、 y 軸方向に 5 だけ平行移動したものである。



これを図示すると、右図の網点部となる。ただし、境界は領域に含まれる。

- (2) 不等式 $2||x|-4|+||y|-5| \leq 3$ の表す領域は、
 $x \geq 0, y \geq 0$ のときは と一致し、 $x < 0, y \geq 0$ のときは
 を y 軸対称したもの、 $x < 0, y < 0$ のときは を原点对称したもの、
 $x \geq 0, y < 0$ のときは を x 軸対称したものである。



これを図示すると、右図の網点部となる。ただし、境界は領域に含まれる。

- (3) $\log_x |y|$ が有理数、すなわち $\log_x |y| = \frac{q}{p}$ となる条件

は、 $x^{\frac{q}{p}} = |y|$ 、 $x^q = |y|^p$ となる整数 p, q が存在することである。

さて、 $x > 0, y > 0$ では、領域内の格子点は、 $x = 3$ のとき、 $(3, 4), (3, 5), (3, 6)$ であるが、いずれも $3^q = y^p$ は成立しない。

$x = 4$ のとき、 $(4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (4, 7), (4, 8)$ であるが、 $4^q = y^p$ が成立するのは $(4, 2), (4, 4), (4, 8)$ の場合である。

また、 $x = 5$ のとき、 $(5, 4), (5, 5), (5, 6)$ であるが、 $5^q = y^p$ が成立するのは $(5, 5)$ の場合だけである。

よって、 $y < 0$ のときも考え合わせると、求める点は、 $(4, \pm 2), (4, \pm 4), (4, \pm 8), (5, \pm 5)$ となる。

[解 説]

いきなり不等式の領域を図示するのは難しいので、(1)が誘導となっています。なお、不等式の領域については、場合分けなどのプロセスを省き、結果だけを述べています。

3

問題のページへ

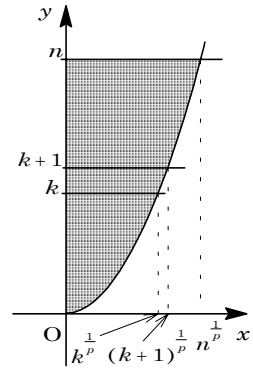
(1) まず、二項定理より、 $0 \leq k \leq n-1, p$ を自然数として、

$$(k^{\frac{1}{p}} + 1)^p = k + 1, \quad k^{\frac{1}{p}} + 1 = (k + 1)^{\frac{1}{p}}$$

$$(k + 1)^{\frac{1}{p}} - k^{\frac{1}{p}} = 1$$

なお、等号は $p = 1$ または $k = 0$ のときに成立する。

これより、 $k \leq y \leq k + 1$ において、 $y = x^p$ のグラフと交わる単位正方形は、ただ 1 つとなる。したがって、 $0 \leq x \leq n^{\frac{1}{p}}$ すなわち $0 \leq y \leq n$ のとき、 $y = x^p$ と交わる単位正方形の個数は n である。



(2) $k \leq y \leq k + 1$ において、 $y = x^p$ のグラフと y 軸にはさまれた部分の面積を $S_{n, k}$ 、この部分にあり、 $y = x^p$ と交わらない単位正方形の個数を $M_{n, k}$ とすると、

$$1 \times M_{n, k} < S_{n, k} < 1 \times (M_{n, k} + 1), \quad \sum_{k=0}^{n-1} M_{n, k} < \sum_{k=0}^{n-1} S_{n, k} < \sum_{k=0}^{n-1} (M_{n, k} + 1)$$

条件より、 $\sum_{k=0}^{n-1} S_{n, k} = S_n$ 、 $\sum_{k=0}^{n-1} M_{n, k} = M_n$ なので、 $M_n < S_n < M_n + n$ である。

$$\text{また、} S_n = n^{\frac{1}{p}} \cdot n - \int_0^{n^{\frac{1}{p}}} x^p dx = n^{\frac{1}{p}+1} - \frac{1}{p+1} [x^{p+1}]_0^{n^{\frac{1}{p}}} = n^{\frac{1}{p}+1} - \frac{1}{p+1} n^{\frac{1}{p}+1}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{p+1}\right) n^{\frac{p+1}{p}} = \frac{p}{p+1} n^{\frac{p+1}{p}}$$

(3) $y = k$ 上の格子点の個数は $M_{n, k} + 1$ 、 $y = n$ 上の格子点の個数は $[n^{\frac{1}{p}}] + 1$ より、

$$L_n = \sum_{k=0}^{n-1} (M_{n, k} + 1) + [n^{\frac{1}{p}}] + 1 = M_n + n + [n^{\frac{1}{p}}] + 1$$

(2)より、 $S_n - n < M_n < S_n$ なので、 $S_n + [n^{\frac{1}{p}}] + 1 < L_n < S_n + [n^{\frac{1}{p}}] + n + 1$

さらに、 $n^{\frac{1}{p}} - 1 < [n^{\frac{1}{p}}] < n^{\frac{1}{p}}$ より、 $S_n + n^{\frac{1}{p}} < L_n < S_n + n^{\frac{1}{p}} + n + 1$

$$\frac{p}{p+1} n^{\frac{p+1}{p}} + n^{\frac{1}{p}} < L_n < \frac{p}{p+1} n^{\frac{p+1}{p}} + n^{\frac{1}{p}} + n + 1$$

$$\frac{p}{p+1} + n^{-1} < n^{-\frac{p+1}{p}} L_n < \frac{p}{p+1} + n^{-1} + n^{-\frac{1}{p}} + n^{-\frac{p+1}{p}}$$

よって、 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\frac{p+1}{p}} L_n = \frac{p}{p+1}$ である。

[解 説]

S_n, M_n, L_n の 3 者がうまく関連するように誘導がつけられています。

4a

問題のページへ

- (1) $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおくと, 条件より,
 $|\vec{a}| = a$, $|\vec{b}| = b$, $|\vec{c}| = c$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$

さて, $\angle OGA = 90^\circ$ より, $\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{AG} = 0$

点 G は ABC の重心なので, $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

そこで, $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OA} = \frac{1}{3}(-2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ から,

$$(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (-2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 0, \quad -2a^2 + b^2 + c^2 = 0 \dots\dots\dots$$

同様にして, $\angle OGB = 90^\circ$ より, $\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{BG} = 0$

$$(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}) = 0, \quad a^2 - 2b^2 + c^2 = 0 \dots\dots\dots$$

また, $\angle OGC = 90^\circ$ より, $\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{CG} = 0$

$$(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}) = 0, \quad a^2 + b^2 - 2c^2 = 0 \dots\dots\dots$$

より, $-3a^2 + 3b^2 = 0$ から $a = b$, $-a^2 + c^2 = 0$ から $a = c$ となる。これは
 を満たすので, 求める条件は, $a = b = c$ である。

- (2) $AP : PD = t : 1 - t$ ($t \neq 0$) とおくと,

$$\overrightarrow{OP} = (1-t)\vec{a} + t\overrightarrow{OD} = (1-t)\vec{a} + t \cdot \frac{2\vec{b} + \vec{c}}{3} = (1-t)\vec{a} + \frac{2t}{3}\vec{b} + \frac{t}{3}\vec{c}$$

また, $\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}) = \overrightarrow{OG}$ より,

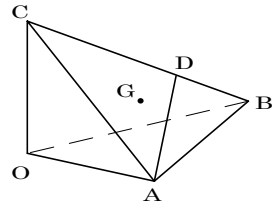
$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= 3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - \vec{a} - (1-t)\vec{a} - \frac{2t}{3}\vec{b} - \frac{t}{3}\vec{c} \\ &= -(1-t)\vec{a} + \left(1 - \frac{2t}{3}\right)\vec{b} + \left(1 - \frac{t}{3}\right)\vec{c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OQ}|^2 &= (1-t)^2 a^2 + \left(1 - \frac{2t}{3}\right)^2 b^2 + \left(1 - \frac{t}{3}\right)^2 c^2 \\ &= \frac{1}{9}(9a^2 + 4b^2 + c^2)t^2 - \frac{2}{3}(3a^2 + 2b^2 + c^2)t + a^2 + b^2 + c^2 \\ &= \frac{1}{9}(9a^2 + 4b^2 + c^2) \left\{ t - \frac{3(3a^2 + 2b^2 + c^2)}{9a^2 + 4b^2 + c^2} \right\}^2 + \frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 + 4c^2 a^2}{9a^2 + 4b^2 + c^2} \end{aligned}$$

以上より, $t = \frac{3(3a^2 + 2b^2 + c^2)}{9a^2 + 4b^2 + c^2}$ のとき, OQ は最小値 $\sqrt{\frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 + 4c^2 a^2}{9a^2 + 4b^2 + c^2}}$ を
 とる。

[解 説]

(2)の平方完成の計算は, 過程は省きましたが, たいへんな量でした。ところで, (1)は何のための設問なのでしょう。



4b

問題のページへ

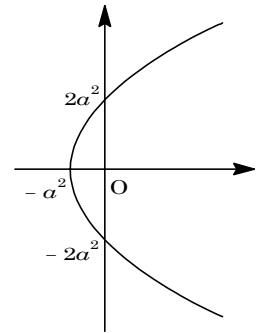
(1) $z = t + ai$ のとき, $z^2 = t^2 - a^2 + 2ati$

ここで, $z^2 = x + yi$ とおくと,

$$x = t^2 - a^2 \dots\dots, \quad y = 2at \dots\dots$$

より $t = \frac{y}{2a}$, に代入して $x = \frac{y^2}{4a^2} - a^2 \dots\dots$

よって, の曲線を図示すると, 右図のようになる。



(2) 点 ai を原点のまわりに θ だけ回転すると,

$$ai(\cos\theta + i\sin\theta) = a(-\sin\theta + i\cos\theta)$$

以下, 実軸を x 軸, 虚軸を y 軸として設定した xy 平面上で考える。

直線 m は, 点 $(-a\sin\theta, a\cos\theta)$ を通り, 法線ベクトルが $(-\sin\theta, \cos\theta)$ である

ので,

$$-\sin\theta \cdot (x + a\sin\theta) + \cos\theta \cdot (y - a\cos\theta) = 0$$

$$-x\sin\theta + y\cos\theta - a = 0 \dots\dots$$

より, $-\left(\frac{y^2}{4a^2} - a^2\right)\sin\theta + y\cos\theta - a = 0$

$$\frac{\sin\theta}{4a^2}y^2 - y\cos\theta + a - a^2\sin\theta = 0 \dots\dots$$

(i) $\sin\theta = 0$ のとき $\cos\theta \neq 0$ より, は $-y\cos\theta + a = 0$

$y = \frac{a}{\cos\theta}$ から, の共有点は 1 個である。

(ii) $\sin\theta \neq 0$ のとき の判別式を D とすると,

$$D = \cos^2\theta - 4 \cdot \frac{\sin\theta}{4a^2} (a - a^2\sin\theta) = 1 - \frac{1}{a}\sin\theta$$

よって, $0 < a < 1$ から, $D > 0$ ($\sin\theta < a$) のとき の共有点は 2 個, $D = 0$ ($\sin\theta = a$) のとき共有点は 1 個, $D < 0$ ($\sin\theta > a$) のとき共有点は 0 個である。

(i)(ii)より, の共有点の個数は, $-1 < \sin\theta < 0$, $0 < \sin\theta < a$ のとき 2 個, $\sin\theta = 0$, a のとき 1 個, $a < \sin\theta < 1$ のとき 0 個である。

[解 説]

本来は複素数平面の問題ですが, (2)では上のように xy 平面を設定して記述した方がすっきりします。

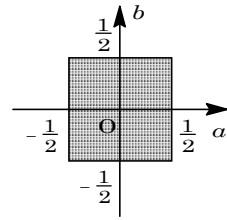
5a

問題のページへ

(1) $|a| < \frac{1}{2}$, $|b| < \frac{1}{2}$ より, (a, b) の存在範囲を図示すると,

右図のようになる。

$$\text{さて, } A^{-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = 3 \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$



なので, $AX = B$ より,

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+a \\ -1+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b+1 \\ a+2b-1 \end{pmatrix}$$

これより, $Q(2a+b+1, a+2b-1)$ となり, 点 $P(a, b)$ が原点 O にあるときの点 Q の位置 R は, $R(1, -1)$ であるので,

$$\frac{RQ}{OP} = \frac{\sqrt{(2a+b)^2 + (a+2b)^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{\frac{5a^2 + 5b^2 + 8ab}{a^2 + b^2}} = \sqrt{5 + \frac{8ab}{a^2 + b^2}}$$

$\frac{RQ}{OP}$ が最大値をとるのは, $ab > 0$ のときであり, 相加・相乗平均の関係より,

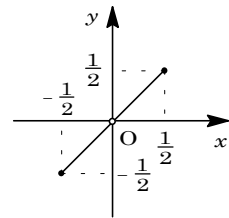
$$a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2b^2} = 2ab, \quad \frac{ab}{a^2 + b^2} \leq \frac{1}{2}$$

等号は $a^2 = b^2$ すなわち $a = b$ のとき成立し, $\frac{RQ}{OP}$ は最大値

$\sqrt{5 + 8 \cdot \frac{1}{2}} = 3$ をとる。このとき, $P(a, b)$ は, $b = a$,

$-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$, $a \neq 0$ を満たし, その存在する位置を図示する

と右図のようになる。



$$\begin{aligned} (2) \quad OQ^2 &= (2a+b+1)^2 + (a+2b-1)^2 = 5a^2 + 5b^2 + 8ab + 2a - 2b + 2 \\ &= 5a^2 + (8b+2)a + 5b^2 - 2b + 2 = 5\left(a + \frac{4b+1}{5}\right)^2 + \frac{9}{5}b^2 - \frac{18}{5}b + \frac{9}{5} \\ &= 5\left(a + \frac{4b+1}{5}\right)^2 + \frac{9}{5}(b-1)^2 \end{aligned}$$

さて, $-\frac{1}{2} < b < \frac{1}{2}$ より $-\frac{3}{5} < -\frac{4b+1}{5} < \frac{1}{5}$ となり, $a = -\frac{4b+1}{5}$ が $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$

の範囲にあるかどうかで場合分けをする。

(i) $-\frac{3}{5} < -\frac{4b+1}{5} < -\frac{1}{2}$ ($\frac{3}{8} < b < \frac{1}{2}$) のとき

$-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$ より, b の値を固定すると, $a = -\frac{1}{2}$ で OQ^2 は最小となり,

$$OQ^2 = \frac{5}{4} + 5b^2 - 4b - 1 - 2b + 2 = 5b^2 - 6b + \frac{9}{4} = 5\left(b - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{9}{20}$$

ここで, b を $\frac{3}{8} < b < \frac{1}{2}$ で変化させると, $b = \frac{1}{2}$ で最小値をとる。

このとき, $OQ^2 = \frac{5}{4} - 3 + \frac{9}{4} = \frac{1}{2}$ となる。

(ii) $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$ のとき
 $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$ より、 b の値を固定すると、 $a = -\frac{4b+1}{5}$ で OQ^2 は最小となり、

$$OQ^2 = \frac{9}{5}(b-1)^2$$

ここで、 b を $-\frac{1}{2} \leq b \leq \frac{3}{8}$ で変化させると、 $b = \frac{3}{8}$ で最小値をとる。

このとき、 $OQ^2 = \frac{9}{5}\left(\frac{3}{8}-1\right)^2 = \frac{45}{64}$ となる。

(i)(ii)より、 OQ^2 の最小値は $\frac{1}{2}$ となり、 OQ の最小値は $\frac{\sqrt{2}}{2}$ である。

このとき、 $a = -\frac{1}{2}$ 、 $b = \frac{1}{2}$ より、 $P\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ である。

[解 説]

a と b は独立に値を変化させることができるので、(2)では1文字固定の考え方をを用いて、 OQ の最小値を求めました。

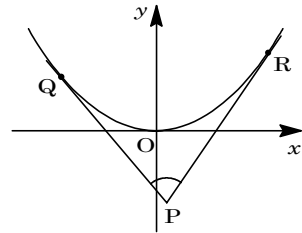
問題のページへ

5b

- (1) x 軸の正の方向から PQ, PR を測った角をそれぞれ α, β とおくと, $m_1 = \tan \alpha, m_2 = \tan \beta$ となる。

$m_1 < 0 < m_2$ より, $\beta < \alpha$ となり,

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \dots\dots\dots \end{aligned}$$



- (2) 点 $P(a, b)$ を通り, 傾き m の直線は,

$$y - b = m(x - a), \quad y = mx - ma + b$$

放物線 $y = \frac{1}{4}x^2$ と接することより, $\frac{1}{4}x^2 - mx + ma - b = 0$

$$D = m^2 - 4 \cdot \frac{1}{4}(ma - b) = 0, \quad m^2 - am + b = 0 \dots\dots\dots$$

$a^2 > 4b$ より, は 2 つの実数解をもち, これを m_1, m_2 ($m_1 < m_2$) とすると,

$$m_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \quad m_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $m_1 < 0 < m_2$ となるので, より, $\tan \theta = \frac{-\sqrt{a^2 - 4b}}{1 + b}$

$$(1 + b)\tan \theta = -\sqrt{a^2 - 4b}$$

$\tan \theta > 0$ から, $1 + b < 0$ すなわち $b < -1$ のもとで,

$$(1 + b)^2 \tan^2 \theta = a^2 - 4b, \quad a^2 = (1 + b)^2 \tan^2 \theta + 4b$$

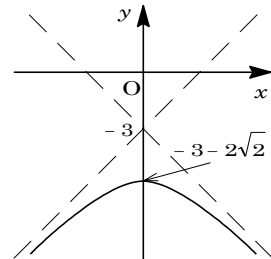
よって, $P(a, b)$ の作る図形の方程式は, $x^2 = (1 + y)^2 \tan^2 \theta + 4y$ ($y < -1$)

- (3) $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき $\tan \theta = 1$ より, $x^2 = (1 + y)^2 + 4y$

$$x^2 - y^2 - 6y = 1, \quad x^2 - (y + 3)^2 = -8$$

$$\frac{x^2}{8} - \frac{(y + 3)^2}{8} = -1$$

よって, 図形 G は双曲線であり, その 2 本の漸近線は, $x \pm (y + 3) = 0$ から $y = \pm x - 3$ となる。さらに, $y < -1$ より双曲線の下側の枝となり, 図示すると, 右図のようになる。



[解 説]

放物線に引いた 2 本の接線の交点が描く軌跡を求める問題です。2 本の接線の位置関係について, チェックが必要です。