1

解答解説のページへ

xy 平面上で，$x = r(t)\cos t$，$y = r(t)\sin t$ $(0 \leqq t \leqq \pi)$ で表される曲線を C とする。

(1)　$r(t) = e^{-t}$ のとき，x の最小値と y の最大値を求め，C の概形を図示せよ。

(2)　一般に，すべての実数 t で微分可能な関数 $r(t)$ に対し，

$$\int_0^{\pi} \{r(t)\}^2 r'(t) \sin^2 t \cos t \, dt = \int_0^{\pi} \{r(t)\}^3 \left(\sin^3 t - \frac{2}{3} \sin t \right) dt$$

が成り立つことを示せ。ここで，$r'(t)$ は $r(t)$ の導関数である。

(3)　(1)で求めた曲線 C と x 軸とで囲まれる図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は，$V = \dfrac{2\pi}{3} \displaystyle\int_0^{\pi} e^{-3t} \sin t \, dt$ と表せることを示せ。

2

解答解説のページへ

座標平面上で，不等式

$$2|x-4|+|y-5|\leqq 3,\ 2||x|-4|+||y|-5|\leqq 3$$

が表す領域を，それぞれ A, B とする。

(1) 領域 A を図示せよ。

(2) 領域 B を図示せよ。

(3) 領域 B の点 $(x,\ y)$ で，x が正の整数であり y が整数であって，$\log_x|y|$ が有理数となる点を，理由を示してすべて求めよ。

3

解答解説のページへ

座標平面上で, x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。格子点を頂点とし, 辺の長さが 1 である正方形（周は含まない）を単位正方形と呼ぶことにする。p, n を自然数とし, 領域 $D_n=\{(x,\ y)\mid 0\leqq x,\ x^p\leqq y\leqq n\}$ を考え, その面積を S_n とする。L_n と M_n を, それぞれ D_n に含まれる格子点の個数および単位正方形の個数とする。

(1)　グラフ $y=x^p\ \left(0\leqq x\leqq n^{\frac{1}{p}}\right)$ と交わる単位正方形の個数は n であることを示せ。

(2)　不等式 $M_n<S_n<M_n+n$ を示せ。また, 面積 S_n を求めよ。

(3)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^{-\frac{p+1}{p}}L_n$ を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4a}}$

解答解説のページへ

空間内に四面体 OABC があり$\angle$AOB, $\angle$BOC, $\angle$COA はすべて$90°$であるとする。辺 OA, OB, OC の長さを，それぞれ a, b, c とし，三角形 ABC の重心を G とする。

(1) $\angle$OGA, $\angle$OGB, $\angle$OGC がすべて$90°$であるための条件を a, b, c の関係式で表せ。

(2) 線分 BC を$1:2$に内分する点を D とする。点 P は直線 AD 上の A 以外の点を動き，点 Q は三角形 APQ の重心が点 G になるように動く。このとき，線分 OQ の長さの最小値を求めよ。

$\boxed{\textbf{4b}}$　　解答解説のページへ

$0<a<1$ である定数 a に対し，複素数平面上で $z=t+ai$ (t は実数全体を動く)が表す直線を l とする。ただし，i は虚数単位である。

(1) 複素数 z が l 上を動くとき，z^2 が表す点の軌跡を図示せよ。

(2) 直線 l を，原点を中心に角 θ だけ回転移動した直線を m とする。m と(1)で求めた軌跡との交点の個数を $\sin\theta$ の値で場合分けして求めよ。

$\boxed{5a}$

解答解説のページへ

座標平面上に点P$(a,\ b)$があり，P は$|a|\leqq\frac{1}{2}$，$|b|\leqq\frac{1}{2}$の範囲を動く。また，点Q$(x,\ y)$の座標は連立1次方程式$AX=B$の解になっている。ただし，

$$A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1+a\\ -1+b\end{pmatrix}$$

である。

(1) 点Pが原点Oにあるときの点Qの位置を点Rとする。P$\neq$Oのとき，$\frac{\mathrm{RQ}}{\mathrm{OP}}$の最大値を求め，その最大値を与える点Pの全体を図示せよ。

(2) OQの最小値と，その最小値を与える点Pの座標を求めよ。

$\boxed{5b}$　　解答解説のページへ

θ を $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ である定数とする。座標平面上で，$a^2>4b$ を満たす点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ に引いた 2 つの接線の接点を Q, R とし，接線 PQ, PR の傾きをそれぞれ m_1，m_2 とおく。点 P は $\angle\mathrm{QPR}=\theta$ を満たしている。点 P の全体が作る図形を G とする。

(1)　$m_1<0<m_2$ のとき，$\tan\theta$ を m_1 と m_2 で表せ。

(2)　G を数式で表せ。

(3)　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき G を図示せよ。