1

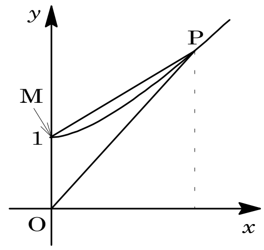
問題のページへ

(1)　$x=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$ ……①，$y=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$ ……②に対して

①＋②より $e^t=x+y$ ……③，①－②より $-e^{-t}=x-y$ ……④なので，

$-1=(x+y)(x-y)$，$x^2-y^2=-1$，$y^2=x^2+1$

②より，$y>0$ なので，$y=\sqrt{x^2+1}$



(2)　$t\geqq 0$ のとき，$e^t\geqq 1$ なので，

③より $x+y\geqq 1$，④より $-1\leqq x-y<0$

$y\geqq -x+1$，$x<y\leqq x+1$

よって曲線を C は，$y=\sqrt{x^2+1}$ $(x\geqq 0)$

すると，$A(t)=\displaystyle\int_0^{\frac{e^t-e^{-t}}{2}}\sqrt{x^2+1}\,dx-\frac{1}{2}\cdot\frac{e^t-e^{-t}}{2}\cdot\frac{e^t+e^{-t}}{2}$

$=\displaystyle\int_0^{\frac{e^t-e^{-t}}{2}}\sqrt{x^2+1}\,dx-\frac{1}{8}(e^{2t}-e^{-2t})$

ここで，$x=\dfrac{e^u-e^{-u}}{2}$ とおくと，$dx=\dfrac{e^u+e^{-u}}{2}du$ より，

$$\int_0^{\frac{e^t-e^{-t}}{2}}\sqrt{x^2+1}\,dx=\int_0^t\frac{e^u+e^{-u}}{2}\cdot\frac{e^u+e^{-u}}{2}du=\frac{1}{4}\int_0^t(e^{2u}+2+e^{-2u})du$$

$$=\frac{1}{4}\Big[\frac{1}{2}e^{2u}+2u-\frac{1}{2}e^{-2u}\Big]_0^t=\frac{1}{8}(e^{2t}-e^{-2t})+\frac{1}{2}t$$

よって，$A(t)=\dfrac{1}{8}(e^{2t}-e^{-2t})+\dfrac{1}{2}t-\dfrac{1}{8}(e^{2t}-e^{-2t})=\dfrac{1}{2}t$

また，$S(t)=\triangle\mathrm{OMP}-A(t)=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}-\dfrac{1}{2}t=\dfrac{1}{4}(e^t-e^{-t})-\dfrac{1}{2}t$

(3)　$A(t)-S(t)=F(t)$ とおくと，$F(t)=\dfrac{1}{2}t-\dfrac{1}{4}(e^t-e^{-t})+\dfrac{1}{2}t=t-\dfrac{1}{4}(e^t-e^{-t})$

$F'(t)=1-\dfrac{1}{4}(e^t+e^{-t})$

$=-\dfrac{e^{2t}-4e^t+1}{4e^t}$

$F'(t)=0$ とすると，$e^t=2\pm\sqrt{3}$

$e^t\geqq 1$ なので $e^t=2+\sqrt{3}$，$t=\log(2+\sqrt{3})$

t	0	…	$\log(2+\sqrt{3})$	…
$F'(t)$		＋	0	－
$F(t)$		↗		↘

よって，右表より，$t=\log(2+\sqrt{3})$ のとき，$F(t)$ は最大となる。

[解　説]

置換積分によって面積を求める頻出問題です。今年の筑波大でも，双曲線を題材とした類題が出ています。

2

問題のページへ

(1)　正の奇数 b の正の約数を小さい方から b_1，b_2，…，b_n とすると，$a = 2^m b$ より，

$$f(a) = (1+2+2^2+\cdots+2^m)(b_1+b_2+\cdots+b_n)$$
$$= \frac{2^{m+1}-1}{2-1} f(b) = (2^{m+1}-1) f(b)$$

(2)　p は 2 以上の整数より，少なくとも 1 と p を約数としてもつ。また，q は正の整数より，少なくとも q を約数としてもつ。すると，$a = pq$ のとき，

$$f(a) \geqq p\times q + 1\times q = (p+1)q$$

等号が成立するのは，a が pq と q だけを約数としてもつ場合であり，$p \geqq 2$ より $q = 1$ である。すると，$a = p$ は p と 1 だけを約数としてもち，p は素数となる。

(3)　$a = 2^m r$，$b = 2^n s$ で，a, b は正の偶数，r, s は奇数より，$m \geqq 1$, $n \geqq 1$ である。

条件より，$f(a) = 2b$，$f(b) = 2a$ なので，

$$f(2^m r) = 2\cdot 2^n s \cdots\cdots\cdots ①,\quad f(2^n s) = 2\cdot 2^m r \cdots\cdots\cdots ②$$

(1)を用いると，①より，$(2^{m+1}-1) f(r) = 2^{n+1} s \cdots\cdots\cdots ③$

②より，$(2^{n+1}-1) f(s) = 2^{m+1} r \cdots\cdots\cdots ④$

さて，$f(r)$，$f(s)$ は整数で，2^{m+1}，2^{n+1} は偶数，$2^{m+1}-1$，$2^{n+1}-1$ は奇数なので，③より s は $2^{m+1}-1$ の倍数，④より r は $2^{n+1}-1$ の倍数となる。すなわち，k, l を正の整数として，$s = (2^{m+1}-1)k$，$r = (2^{n+1}-1)l$ と表すことができる。

③より，$(2^{m+1}-1) f(r) = 2^{n+1}(2^{m+1}-1)k$，$f(r) = 2^{n+1} k \cdots\cdots\cdots ⑤$

④より，$(2^{n+1}-1) f(s) = 2^{m+1}(2^{n+1}-1)l$，$f(s) = 2^{m+1} l \cdots\cdots\cdots ⑥$

一方，(2)より，$f(r) = f((2^{n+1}-1)l) \geqq (2^{n+1}-1+1)l = 2^{n+1} l \cdots\cdots\cdots ⑦$

$$f(s) = f((2^{m+1}-1)k) \geqq (2^{m+1}-1+1)k = 2^{m+1} k \cdots\cdots\cdots ⑧$$

⑤⑦より $2^{n+1}k \geqq 2^{n+1} l$ となり $k \geqq l$，⑥⑧より $2^{m+1} l \geqq 2^{m+1} k$ となり $l \geqq k$，よって $k = l$ である。

すると，⑤⑥より，$f((2^{n+1}-1)k) = (2^{n+1}-1+1)k$

$$f((2^{m+1}-1)k) = (2^{m+1}-1+1)k$$

ここで，$2^{m+1}-1 \geqq 3$，$2^{n+1}-1 \geqq 3$ なので，(2)の等号成立条件から，$2^{m+1}-1$，$2^{n+1}-1$ は素数で，$k = 1$ となる。

以上より，$r = 2^{n+1}-1$，$s = 2^{m+1}-1$ となり，ともに素数である。

[解 説]

約数全体の和という有名な問題を題材にした難問です。文系に $m = 2$，$n = 4$ の場合が出題されています。

3

問題のページへ

(1) $x>0,\ y>0$ に対して，$t=\dfrac{x}{y}>0$ とおくと，

$$x\log x-x\log y-x+y\geqq 0 \iff \frac{x}{y}\log\frac{x}{y}-\frac{x}{y}+1\geqq 0 \iff t\log t-t+1\geqq 0$$

ここで，$h(t)=t\log t-t+1$ とおくと，

$$h'(t)=\log t+t\cdot\frac{1}{t}-1=\log t$$

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(t)$		$-$	0	$+$
$h(t)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

右表より，$t>0$ のとき，$h(t)\geqq 0$ となる。

よって，$x\log x-x\log y-x+y\geqq 0$ ………①

(2) 区間$[a,\ b]$において，$f(x)>0$，$g(x)>0$なので，①より，

$$f(x)\log f(x)-f(x)\log g(x)-f(x)+g(x)\geqq 0$$

$$\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx-\int_a^b f(x)\log g(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx\geqq 0$$

条件より，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b g(x)\,dx$ ……②なので，

$$\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx\geqq\int_a^b f(x)\log g(x)\,dx \text{ ………③}$$

(3) $\displaystyle M=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ より，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)M=\int_a^b M\,dx$ ………④

これより，$g(x)=M$ とおくと，②をみたすので，③より，

$$\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx\geqq\int_a^b f(x)\log M\,dx=\log M\int_a^b f(x)\,dx$$

④の関係から，$\displaystyle\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx\geqq(b-a)M\log M$ となり，

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx\geqq M\log M$$

[解 説]

(1)から(2)へはスムーズに流れ，(2)から(3)へはちょっと引っかかるという，うまい誘導がついています。

4 a

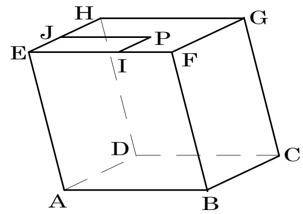
問題のページへ

(1) $\triangle ABC=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin A=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sqrt{1-\cos^2 A}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2(1-\cos^2 A)}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$

(2) 条件より，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|=1$，$|\overrightarrow{AE}|=2$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=0$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=1\cdot 2\cos\theta=2\cos\theta$



ここで，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$

$|\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+|\overrightarrow{AD}|^2=2$

$|\overrightarrow{AP}|^2=x^2|\overrightarrow{AB}|^2+y^2|\overrightarrow{AD}|^2+|\overrightarrow{AE}|^2$

$\quad+2xy\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+2y\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}+2x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}$

$\quad=x^2+y^2+4+4x\cos\theta$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}=x|\overrightarrow{AB}|^2+y\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}+x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+y|\overrightarrow{AD}|^2+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}$

$\quad=x+2\cos\theta+y$

そこで，$\triangle ACP$ の面積を S とすると, (1)より,

$S=\frac{1}{2}\sqrt{2(x^2+y^2+4+4x\cos\theta)-(x+2\cos\theta+y)^2}$

$\quad=\frac{1}{2}\sqrt{x^2-2xy+y^2+4x\cos\theta-4y\cos\theta+8-4\cos^2\theta}$

(3) $P=x^2-2xy+y^2+4x\cos\theta-4y\cos\theta+8-4\cos^2\theta$ とおくと，$S=\frac{1}{2}\sqrt{P}$ となる。

さて，$x-y=t$ とおくと，$0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 1$ より $-1\leqq t\leqq 1$ であり,

$P=(x-y)^2+4(x-y)\cos\theta+8-4\cos^2\theta=t^2+4t\cos\theta+8-4\cos^2\theta$

$\quad=(t+2\cos\theta)^2+8-8\cos^2\theta=(t+2\cos\theta)^2+8\sin^2\theta$

(i) $-2\cos\theta<-1\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{3}\right)$ のとき　P は $t=-1$ で最小となる。

このとき, S は最小値 $\frac{1}{2}\sqrt{9-4\cos\theta-4\cos^2\theta}$ をとる。

(ii) $-1\leqq -2\cos\theta\leqq 1\ \left(\frac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\frac{2\pi}{3}\right)$ のとき　P は $t=-2\cos\theta$ で最小となる。

このとき, S は最小値 $\frac{1}{2}\sqrt{8\sin^2\theta}=\sqrt{2}\sin\theta$ をとる。

(iii) $-2\cos\theta>1\ \left(\frac{2\pi}{3}<\theta<\pi\right)$ のとき　P は $t=1$ で最小となる。

このとき, S は最小値 $\frac{1}{2}\sqrt{9+4\cos\theta-4\cos^2\theta}$ をとる。

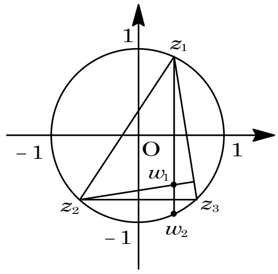
[解 説]

(3)は 1 文字を固定して，2 次関数として最小値を求める問題かとも思いましたが, 式の特徴を利用すると，その必要はありませんでした。

4b　　　　問題のページへ

(1)　まず, 3 点 z_1, z_2, z_3 は原点中心で半径 1 の円 C 上にあるので,

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$$



すると, $\dfrac{w_1 - z_1}{z_2 - z_3} = \dfrac{z_2 + z_3}{z_2 - z_3} = \dfrac{(z_2 + z_3)(\overline{z_2} - \overline{z_3})}{(z_2 - z_3)(\overline{z_2} - \overline{z_3})}$

$$= \frac{|z_2|^2 - z_2\overline{z_3} + \overline{z_2}z_3 - |z_3|^2}{|z_2 - z_3|^2}$$

$$= \frac{-z_2\overline{z_3} + \overline{z_2}z_3}{|z_2 - z_3|^2}$$

ここで, $u = -z_2\overline{z_3} + \overline{z_2}z_3$ とおくと, $\overline{u} = -\overline{z_2}z_3 + z_2\overline{z_3}$ となり, $\overline{u} = -u$ である。すなわち, u は純虚数となるので, $\dfrac{w_1 - z_1}{z_2 - z_3}$ も純虚数である。

よって, 2 点 z_1, w_1 を通る直線と 2 点 z_2, z_3 を通る直線は直交する。

同様にして, $\dfrac{w_1 - z_2}{z_3 - z_1} = \dfrac{z_3 + z_1}{z_3 - z_1}$ も純虚数となり, 2 点 z_2, w_1 を通る直線と 2 点 z_1, z_3 を通る直線は直交する。

以上より, 点 w_1 は 3 点 z_1, z_2, z_3 を頂点とする三角形の垂心である。

(2)　$\dfrac{w_2 - z_1}{z_2 - z_3} = \dfrac{-\overline{z_1}z_2z_3 - z_1}{z_2 - z_3} = -\dfrac{(\overline{z_1}z_2z_3 + z_1)(\overline{z_2} - \overline{z_3})}{(z_2 - z_3)(\overline{z_2} - \overline{z_3})}$

$$= -\frac{\overline{z_1}|z_2|^2 z_3 - \overline{z_1}z_2|z_3|^2 + z_1\overline{z_2} - z_1\overline{z_3}}{|z_2 - z_3|^2} = -\frac{\overline{z_1}z_3 - \overline{z_1}z_2 + z_1\overline{z_2} - z_1\overline{z_3}}{|z_2 - z_3|^2}$$

ここで, $v = \overline{z_1}z_3 - \overline{z_1}z_2 + z_1\overline{z_2} - z_1\overline{z_3}$ とおくと, $\overline{v} = z_1\overline{z_3} - z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 - \overline{z_1}z_3$ となり, $\overline{v} = -v$ である。すなわち, v は純虚数となるので, $\dfrac{w_2 - z_1}{z_2 - z_3}$ も純虚数である。

よって, 2 点 z_1, w_2 を通る直線と 2 点 z_2, z_3 を通る直線は直交する。

また, $|w_2| = |-\overline{z_1}z_2z_3| = |-\overline{z_1}||z_2||z_3| = 1$ より, 点 w_2 は円 C 上にある。

以上より, $w_2 \neq z_1$ のとき, 点 w_2 は, 2 点 z_2, z_3 を通る直線上に点 z_1 から下ろした垂線またはその延長線が円 C と交わる点である。

(3)　点 w_1 と点 w_2 を結ぶ線分の中点を w とすると,

$$w = \frac{w_1 + w_2}{2} = \frac{z_1 + z_2 + z_3 - \overline{z_1}z_1z_1}{2}$$

さて, $\dfrac{w - z_3}{z_2 - z_3} = \dfrac{z_1 + z_2 - z_3 - \overline{z_1}z_2z_3}{2(z_2 - z_3)} = \dfrac{(z_1 + z_2 - z_3 - \overline{z_1}z_2z_3)(\overline{z_2} - \overline{z_3})}{2(z_2 - z_3)(\overline{z_2} - \overline{z_3})}$

$$= \frac{z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 - z_2\overline{z_3} - \overline{z_2}z_3 - z_1\overline{z_3} - \overline{z_1}z_3 + 2}{2|z_2 - z_3|^2}$$

ここで, $t = z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 - z_2\overline{z_3} - \overline{z_2}z_3 - z_1\overline{z_3} - \overline{z_1}z_3$ とおくと,

$$\bar{t} = \overline{z_1}z_2 + z_1\overline{z_2} - \overline{z_2}z_3 - z_2\overline{z_3} - \overline{z_1}z_3 - z_1\overline{z_3}$$

これより$\bar{t} = t$，すなわちtは実数となるので，$\dfrac{w - z_3}{z_2 - z_3}$も実数である。

よって，点wは2点z_2，z_3を通る直線上にある。

以上より，点w_1と点w_2を結ぶ線分の中点は，2 点z_2，z_3を通る直線とこの直線上に点z_1から下ろした垂線との交点である。

[解 説]

複素数平面上で2直線の直交条件と共線条件を題材にした問題です。文字が多いので，計算は複雑です。

5a

問題のページへ

(1) $f(\theta)=\dfrac{(\theta-\pi)^2}{2\pi^2}+\dfrac{1}{2}$ より，$f(0)=1$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{5}{8}$，$f(\pi)=\dfrac{1}{2}$

まず，$\mathrm{P}(0)=(f(0),\ 0)=(1,\ 0)$ より，$\mathrm{P}_1(1,\ 0)$ である。

点 P_1 が $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\dfrac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ ……①上にあるので,

$$\frac{(1-\alpha)^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}=1 \cdots\cdots\cdots ②$$

また，$\mathrm{P}(\pi)=(-f(\pi),\ 0)=\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ より，$\mathrm{P}_3\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ である。

点 P_3 が①の内部に含まれる条件は，$\dfrac{\left(-\frac{1}{2}-\alpha\right)^2}{a^2}+\dfrac{\beta^2}{b^2}<1$ ………③

②より $\dfrac{\beta^2}{b^2}=1-\dfrac{(1-\alpha)^2}{a^2}$ となり，③に代入して，$\dfrac{\left(-\frac{1}{2}-\alpha\right)^2}{a^2}+1-\dfrac{(1-\alpha)^2}{a^2}<1$

$$\left(-\frac{1}{2}-\alpha\right)^2-(1-\alpha)^2<0,\ \frac{1}{2}-2\alpha>0,\ \alpha<\frac{1}{4}$$

(2) $\mathrm{P}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\left(0,\ f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)=\left(0,\ \dfrac{5}{8}\right)$ より，$\mathrm{P}_2\left(0,\ \dfrac{5}{8}\right)$ である。

また，条件より，$\dfrac{dx}{d\theta}=f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta$，$\dfrac{dy}{d\theta}=f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta$

さて，$f'(\theta)=\dfrac{\theta-\pi}{\pi^2}$ より $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{2\pi}$ なので，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき,

$$\frac{dx}{d\theta}=-\frac{5}{8},\ \frac{dy}{d\theta}=-\frac{1}{2\pi},\ \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2\pi}\cdot\left(-\frac{8}{5}\right)=\frac{4}{5\pi} \cdots\cdots\cdots ④$$

よって，点 P_2 における曲線 C の接線は，$y=\dfrac{4}{5\pi}x+\dfrac{5}{8}$

(3) 条件(i)より，楕円 D は，$\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ………⑤

条件(ii)より，⑤上に点 P_1，P_2 があるので,

$$\frac{(1-\alpha)^2}{a^2}=1 \cdots\cdots ⑥,\ \frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{25}{64b^2}=1 \cdots\cdots ⑦$$

また，⑤より $\dfrac{2(x-\alpha)}{a^2}+\dfrac{2y}{b^2}\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$，$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{b^2(x-\alpha)}{a^2y}$ なので，点 $\mathrm{P}_2\left(0,\ \dfrac{5}{8}\right)$ における接線の傾きは，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{8b^2\alpha}{5a^2}$ となる。

条件(iii)より，これが④と一致するので，$\dfrac{8b^2\alpha}{5a^2}=\dfrac{4}{5\pi}$，$a^2=2\pi b^2\alpha$ ………⑧

⑥⑧より，$(1-\alpha)^2=2\pi b^2\alpha$ ………⑨

⑦⑧より，$\dfrac{\alpha}{2\pi b^2}+\dfrac{25}{64b^2}=1$，$b^2=\dfrac{\alpha}{2\pi}+\dfrac{25}{64}$ ………⑩

⑨⑩より，$(1-\alpha)^2=2\pi\alpha\left(\dfrac{\alpha}{2\pi}+\dfrac{25}{64}\right)$，$\left(\dfrac{25}{32}\pi+2\right)\alpha=1$となり，

$$\alpha=\frac{32}{25\pi+64}<\frac{32}{25\times3+64}=\frac{32}{139}<\frac{32}{128}=\frac{1}{4}$$

よって, (1)より，点P_3は楕円Dの内部に含まれる。

[解　説]

パラメータ曲線や楕円の問題というよりは，連立式の処理問題という感じでした。計算量がたいへん多く，疲れます。

5 b

問題のページへ

(1)　行列 A はべき等行列なので，$A^2=A$ ………①

$ad-bc\neq 0$ より，A^{-1} が存在するので，①より，

$$A^{-1}A^2=A^{-1}A,\ \ A=E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

(2)　$ad-bc=0$ のとき，ハミルトン・ケーリーの定理より，

$$A^2-(a+d)A=O\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$A-(a+d)A=O$，$(1-a-d)A=O$

$A\neq O$ なので，$1-a-d=0$，$a+d=1$

(3)　$A+B$ がべき等行列なので，$(A+B)^2=A+B$

$$A^2+AB+BA+B^2=A+B$$

行列 A,B もべき等行列なので，$A^2=A$，$B^2=B$ となり，

$$AB+BA=O\ \cdots\cdots\cdots③$$

さて，$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\neq O$，$B=\begin{pmatrix}e&f\\g&h\end{pmatrix}\neq O$ に対し，$A+B=\begin{pmatrix}a+e&b+f\\c+g&d+h\end{pmatrix}$

(i)　$ad-bc\neq 0$，$eh-fg\neq 0$ のとき

(1)より $A=B=E$ となるので，③は $2E=O$ となり，成立しない。

(ii)　$ad-bc\neq 0$，$eh-fg=0$ のとき

(1)より $A=E$ となるので，③は $2B=O$ となり，成立しない。

(iii)　$ad-bc=0$，$eh-fg\neq 0$ のとき

(1)より $B=E$ となるので，③は $2A=O$ となり，成立しない。

(iv)　$ad-bc=0$，$eh-fg=0$ のとき

(2)より，$a+d=1$，$e+h=1$ となるので，$(a+e)+(d+h)=2\neq 1$

よって，$(A+B)^{-1}$ が存在することになり，このとき(1)より，

$$A+B=E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

この関係をみたす行列 A,B の 1 例は，$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ である。

[解 説]

(1)(2)の誘導に従って，(3)も行列式が 0 か 0 でないかに注目して場合分けをしました。ところが，(iv)の場合で行き詰まってしまい，行列式でなくトレースが 1 か 2 かということに注目すべきだったのに気付きました。