

1

問題のページへ

(1) $f(x) = \frac{2}{3}ax^3 + (a+b)x^2 + (b+1)x$ に対して、 $f'(x) = 2ax^2 + 2(a+b)x + b+1$

関数 $f(x)$ がつねに増加する条件は、 $f'(x) \geq 0$ である。ただし、等号は恒等的には成立しない。

(i) $a = 0$ のとき $f'(x) = 2bx + b + 1 \geq 0$ なので、 $2b = 0$ かつ $b + 1 > 0$

よって、 $b = 0$ となる。

(ii) $a \neq 0$ のとき $a > 0$ かつ $f'(x) = 0$ の判別式 $D \geq 0$

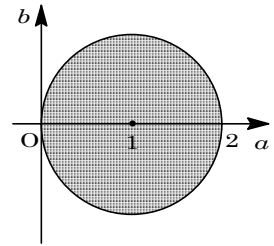
$$D/4 = (a+b)^2 - 2a(b+1) \geq 0, \quad a^2 + b^2 - 2a \geq 0$$

よって、 $(a-1)^2 + b^2 \leq 1$

(i)(ii)より、 $a = b = 0$ 、または $a > 0$ かつ $(a-1)^2 + b^2 \leq 1$

すなわち、 $(a-1)^2 + b^2 \leq 1$ となり、図示すると右図の

網点部のようになる。なお、境界は領域に含む。



(2) $a = 0$ のとき、 $x > -1$ で $f'(x) = 2bx + b + 1 \geq 0$ となる条件は、

(i) $2b = 0$ のとき (1)より適する。

(ii) $2b \neq 0$ のとき $2b > 0$ かつ $f'(-1) = -2b + b + 1 = -b + 1 \geq 0$

よって、 $0 < b \leq 1$ となる。

(i)(ii)より、求める条件は、 $0 \leq b \leq 1$

(3) $a \neq 0$ のとき $f'(x) = 2a\left(x + \frac{a+b}{2a}\right)^2 - \frac{a^2 + b^2 - 2a}{2a}$

$x > -1$ で $f'(x) \geq 0$ となる条件は、 $a > 0$ において、

(i) $-\frac{a+b}{2a} \leq -1$ ($b < a$) のとき

$$f'(-1) = 2a - 2(a+b) + b + 1 = -b + 1 \geq 0 \text{ より、} b \leq 1 \text{ となる。}$$

(ii) $-\frac{a+b}{2a} > -1$ ($b < a$) のとき

$f'(x) = 0$ の判別式 $D \geq 0$ なので、(1)より、

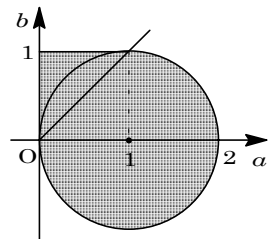
$$(a-1)^2 + b^2 \leq 1$$

(2)と合わせると、 $a = 0$ のとき $0 \leq b \leq 1$ 、 $a > 0$ のとき

$b \leq a$ ならば $b \leq 1$ で、 $b < a$ ならば $(a-1)^2 + b^2 \leq 1$ とな

り、図示すると右図の網点部のようになる。なお、境界は

領域に含む。



[解 説]

ていねいに場合分けをして、結論を導いていく標準的な問題です。

2

問題のページへ

- (1) 点
- (p, q)
- に関する, 点
- (X, Y)
- に対称な点を
- (x, y)
- とすると,

$$\frac{x+X}{2} = p, \quad \frac{y+Y}{2} = q$$

$x = 2p - X, y = 2q - Y$ より, 対称点の座標は $(2p - X, 2q - Y)$ となる。

- (2)
- $G: y = x^3 + ax^2 + bx + c \dots\dots$
- 上の点
- (X, Y)
- に対して,

$$Y = X^3 + aX^2 + bX + c \dots\dots\dots$$

G 上の点 $(p, p^3 + ap^2 + bp + c)$ に関して対称移動した点を (x, y) とすると,

$$X = 2p - x, \quad Y = 2(p^3 + ap^2 + bp + c) - y \dots\dots\dots$$

より, $2(p^3 + ap^2 + bp + c) - y = (2p - x)^3 + a(2p - x)^2 + b(2p - x) + c$

$$y = x^3 - (a + 6p)x^2 + (12p^2 + 4ap + b)x - 6p^3 - 2ap^2 + c \dots\dots\dots$$

と G が一致する条件は,

$$a = -a - 6p \dots\dots, \quad b = 12p^2 + 4ap + b \dots\dots, \quad c = -6p^3 - 2ap^2 + c \dots\dots$$

より $p = -\frac{1}{3}a$ となり, このとき G はともに成立する。

すると, $q = p^3 + ap^2 + bp + c = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c$ となり, G はこのグラフ上の点

$(-\frac{1}{3}a, \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c)$ に関して点対称である。

- (3) 直線
- $mx + ny = 0$
- に関する, 点
- (X, Y)
- に対称な点を
- (x, y)
- とすると, この直線の法線ベクトル
- \vec{n}
- が
- $\vec{n} = (m, n)$
- なので,

$$(x, y) = (X, Y) + k(m, n) = (X + km, Y + kn)$$

ここで, 点 (X, Y) と点 (x, y) の中点 $(X + \frac{1}{2}km, Y + \frac{1}{2}kn)$ が, $mx + ny = 0$ 上にあるので,

$$m\left(X + \frac{1}{2}km\right) + n\left(Y + \frac{1}{2}kn\right) = 0, \quad k = -\frac{2(mX + nY)}{m^2 + n^2}$$

$$\text{よって, } x = X - \frac{2(mX + nY)}{m^2 + n^2}m = \frac{(n^2 - m^2)X - 2mnY}{m^2 + n^2}$$

$$y = Y - \frac{2(mX + nY)}{m^2 + n^2}n = \frac{-2mnX + (m^2 - n^2)Y}{m^2 + n^2}$$

対称点の座標は $\left(\frac{(n^2 - m^2)X - 2mnY}{m^2 + n^2}, \frac{-2mnX + (m^2 - n^2)Y}{m^2 + n^2}\right)$ となる。

- (4)
- $p = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}, q = \frac{2mn}{m^2 + n^2}$
- とおくと, (3)より
- $x = -pX - qY, y = -qX + pY$

(2)と同様にして, $X = -px - qy, Y = -qx + py$ を G に代入すると,

$$-qx + py = (-px - qy)^3 + a(-px - qy)^2 + b(-px - qy) + c \dots\dots\dots$$

$q \neq 0$ のときは, 明らかに G は G と一致しない。

$q = 0$ のときは、 $p \neq 0$ となり、 $y = -p^2x^3 + apx^2 - bx + \frac{c}{p}$ ……

x^3 の係数を比べると、どんな p の値に対しても $-p^2 < 0$ なので、は と一致しない。

したがって、 G は原点を通るどんな直線に対しても線対称でない。

[解説]

3 次曲線の有名な性質についての証明問題です。このように、一度きっちり証明しておくとも記憶に残ります。文系では、(3)(4)が y 軸に平行な直線に関する対称性を問う問題でした。

3

問題のページへ

(1) 中心軸が x 軸で、断面が半径 r の円である円柱は、 $y^2 + z^2 = r^2$ ……

また、中心軸が z 軸で、断面が右図のような 1 辺 $\frac{2\sqrt{2}}{r}$

の正方形である正四角柱は、

$$|x| + |y| = \frac{2}{r} \dots\dots$$

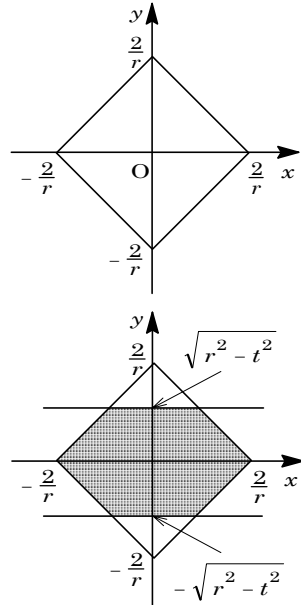
の共通部分を平面 $z = t$ ($-r \leq t \leq r$) で切ったときの切り口は、 $y^2 + t^2 = r^2$, $|x| + |y| = \frac{2}{r}$

$$-\sqrt{r^2 - t^2} \leq y \leq \sqrt{r^2 - t^2}, |x| + |y| = \frac{2}{r}$$

さて、 $0 < r - \sqrt{2}$ から、 $\frac{2}{r} \leq r - \sqrt{r^2 - t^2}$

よって、 $z = t$ での切り口は右図の網点部となり、その面積を $S(t)$ とすると、

$$\begin{aligned} S(t) &= \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{2}{r} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{r} - \sqrt{r^2 - t^2} \right)^2 \right\} \times 4 \\ &= \frac{8}{r} \sqrt{r^2 - t^2} + 2t^2 - 2r^2 \end{aligned}$$



(2) 共通部分 K が xy 平面に関して対称なので、

$$V(r) = 2 \int_0^r S(t) dt = 2 \int_0^r \left(\frac{8}{r} \sqrt{r^2 - t^2} + 2t^2 - 2r^2 \right) dt$$

ここで、 $\int_0^r \sqrt{r^2 - t^2} dt = \pi r^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \pi r^2$ より、

$$V(r) = \frac{16}{r} \cdot \frac{1}{4} \pi r^2 + 2 \left[\frac{2}{3} t^3 - 2r^2 t \right]_0^r = 4\pi r - \frac{8}{3} r^3$$

(3) $V'(r) = 4\pi - 8r^2 = -4(2r^2 - \pi)$

右表より、 $0 < r < \sqrt{2}$ において、 $r = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

のときに $V(r)$ は最大となり、最大値は、

$$V\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = 4\pi \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{8}{3} \cdot \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3} \pi \sqrt{\pi}$$

である。

| | | | | | |
|---------|---|-----|------------------------|-----|------------|
| r | 0 | ... | $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ | ... | $\sqrt{2}$ |
| $V'(r)$ | | + | 0 | - | |
| $V(r)$ | | ↗ | | ↘ | |

[解 説]

10 年も前になりますが、直交する円柱と円柱の共通部分の体積を求める問題が 1991 年に出ました。今年は円柱と正四角柱でしたが、それにしても、現行課程になってもこの種類の問題はよく出題されます。

4 a

問題のページへ

(1) 条件より, $az\bar{z} + \bar{b}z + b\bar{z} + c = 0$ ($a \neq 0$) なので,

$$z\bar{z} + \frac{\bar{b}}{a}z + \frac{b}{a}\bar{z} + \frac{c}{a} = 0, \quad \left(z + \frac{b}{a}\right)\left(\bar{z} + \frac{\bar{b}}{a}\right) = -\frac{c}{a} + \frac{b\bar{b}}{a^2}$$

$$a \text{ は実数より, } \left(z + \frac{b}{a}\right)\left(\overline{z + \frac{b}{a}}\right) = \frac{|b|^2 - ac}{a^2}, \quad \left|z + \frac{b}{a}\right|^2 = \frac{|b|^2 - ac}{a^2}$$

$$\text{ここで, } |b|^2 - ac > 0 \text{ なので, } \left|z + \frac{b}{a}\right| = \frac{\sqrt{|b|^2 - ac}}{|a|}$$

よって, 点 z は中心 $-\frac{b}{a}$, 半径 $\frac{\sqrt{|b|^2 - ac}}{|a|}$ の円を描く。

(2) 条件より, $d(z-p)(\bar{z}-\bar{q}) = \bar{d}(z-q)(\bar{z}-\bar{p}) \dots\dots\dots$

$$(d-\bar{d})z\bar{z} + (\bar{d}p-dq)z + (\bar{d}q-dp)\bar{z} + (dpq-\bar{d}p\bar{q}) = 0 \dots\dots\dots$$

(i) $d = \bar{d}$ (d が実数) のときより $d(z-p)(\bar{z}-\bar{q}) = d(z-q)(\bar{z}-\bar{p})$ となり, $d \neq 0$ なので,

$$(z-p)(\bar{z}-\bar{q}) = (z-q)(\bar{z}-\bar{p}) \dots\dots\dots$$

$z = q$ のときは成立し, $z \neq q$ のとき $\frac{z-p}{z-q} = \frac{\bar{z}-\bar{p}}{\bar{z}-\bar{q}}$ となり, t を実数として,

$$\frac{z-p}{z-q} = t, \quad z-p = t(z-q)$$

よって, 点 z は 2 点 p, q を結ぶ直線を描く。(ii) $d \neq \bar{d}$ (d が虚数) のとき

$$\text{より, } i(d-\bar{d})z\bar{z} + i(\bar{d}p-dq)z + i(\bar{d}q-dp)\bar{z} + i(dpq-\bar{d}p\bar{q}) = 0 \dots\dots\dots$$

ここで, $a = i(d-\bar{d})$, $b = i(\bar{d}p-dp)$, $c = i(dpq-\bar{d}p\bar{q})$ とおくと, a, c は実数, $\bar{b} = i(\bar{d}p-dq)$ となり, $az\bar{z} + \bar{b}z + b\bar{z} + c = 0$ ($a \neq 0$) と表せる。

$$\begin{aligned} |b|^2 - ac &= i(\bar{d}q-dp) \cdot i(\bar{d}p-dq) - i(d-\bar{d}) \cdot i(dpq-\bar{d}p\bar{q}) \\ &= -(\bar{d}q-dp)(\bar{d}p-dq) + (d-\bar{d})(dpq-\bar{d}p\bar{q}) \\ &= d\bar{d}(p\bar{p}+q\bar{q}-p\bar{q}-\bar{p}q) = |d|^2(p-q)(\bar{p}-\bar{q}) \\ &= |d|^2|p-q|^2 > 0 \quad (d \neq 0, p \neq q) \end{aligned}$$

(1)より, 点 z は中心 $-\frac{i(\bar{d}q-dp)}{i(d-\bar{d})} = \frac{dp-\bar{d}q}{d-\bar{d}}$, 半径 $\frac{|d||p-q|}{|d-\bar{d}|}$ の円を描く。

[解 説]

複素数平面における円の方程式が題材です。(2)では(1)の利用を考え, 計算を少しでも軽減しようと思いました。

4 b

問題のページへ

(1) 3 回の 3 の目, 2 回の 5 の目の以外に, 3 以下の目が少なくとも 1 回出たとき $X_4 = 3$, すべて 4 以上で 4 の目が少なくとも 1 つ出たとき $X_4 = 4$, すべて 5 以上のとき $X_4 = 5$ となる。よって, $X_4 = \{3, 4, 5\}$ である。

(2) $X_1 = 2$ となるのは, すべて 2 以上で 2 の目が少なくとも 1 回出たときなので,

$$P(X_1 = 2) = \left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{4}{6}\right)^n = \left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

(3) (2)と同様に考えて, $P(X_1 = 1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$

$$P(X_1 = 3) = \left(\frac{4}{6}\right)^n - \left(\frac{3}{6}\right)^n, \quad P(X_1 = 4) = \left(\frac{3}{6}\right)^n - \left(\frac{2}{6}\right)^n$$

$$P(X_1 = 5) = \left(\frac{2}{6}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n, \quad P(X_1 = 6) = \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

$$\begin{aligned} \text{よって, } E(X_1) &= 1 \times \left\{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right\} + 2 \times \left\{\left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{4}{6}\right)^n\right\} + 3 \times \left\{\left(\frac{4}{6}\right)^n - \left(\frac{3}{6}\right)^n\right\} \\ &\quad + 4 \times \left\{\left(\frac{3}{6}\right)^n - \left(\frac{2}{6}\right)^n\right\} + 5 \times \left\{\left(\frac{2}{6}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n\right\} + 6 \times \left(\frac{1}{6}\right)^n \\ &= 1 + \left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(\frac{4}{6}\right)^n + \left(\frac{3}{6}\right)^n + \left(\frac{2}{6}\right)^n + \left(\frac{1}{6}\right)^n \\ &= 1 + \left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{6}\right)^n \end{aligned}$$

(4) $\left(\frac{5}{6}\right)^n < \left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{6}\right)^n < 5 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n$ なので, (3)より,

$$\log \frac{5}{6} = \frac{1}{n} \log \left(\frac{5}{6}\right)^n < \frac{1}{n} \log(E(X_1) - 1) < \frac{1}{n} \log 5 \left(\frac{5}{6}\right)^n = \frac{1}{n} \log 5 + \log \frac{5}{6}$$

$$\text{よって, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(E(X_1) - 1) = \log \frac{5}{6}$$

(5) (3)と同様に考えて, $P(X_n = 1) = \left(\frac{1}{6}\right)^n$, $P(X_n = 2) = \left(\frac{2}{6}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n$

$$P(X_n = 3) = \left(\frac{3}{6}\right)^n - \left(\frac{2}{6}\right)^n, \quad P(X_n = 4) = \left(\frac{4}{6}\right)^n - \left(\frac{3}{6}\right)^n$$

$$P(X_n = 5) = \left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{4}{6}\right)^n, \quad P(X_n = 6) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$\begin{aligned} \text{よって, } E(X_n) &= 1 \times \left(\frac{1}{6}\right)^n + 2 \times \left\{\left(\frac{2}{6}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n\right\} + 3 \times \left\{\left(\frac{3}{6}\right)^n - \left(\frac{2}{6}\right)^n\right\} \\ &\quad + 4 \times \left\{\left(\frac{4}{6}\right)^n - \left(\frac{3}{6}\right)^n\right\} + 5 \times \left\{\left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{4}{6}\right)^n\right\} + 6 \times \left\{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right\} \\ &= 6 - \left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{4}{6}\right)^n - \left(\frac{3}{6}\right)^n - \left(\frac{2}{6}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n \end{aligned}$$

$$\text{以上より, } E(X_1 + X_n) = E(X_1) + E(X_n) = 7$$

[解 説]

最大値, 最小値の確率を求める有名問題です。確率の部分については, (5)の最後の 1 行以外は数学 の範囲です。

5a

問題のページへ

(1) $P(t, f(t))$ における接線の傾きは $f'(t)$ より, $\tan\theta(t) = f'(t)$ となる。

$$\frac{1}{\cos^2\theta(t)} \cdot \theta'(t) = f''(t), \quad \theta'(t) = f''(t)\cos^2\theta(t)$$

条件より, $f''(t) > 0$ なので $\theta'(t) > 0$, よって $\theta(t)$ はつねに増加する。

(2) より, 接線方向ベクトルは $(1, \tan\theta(t))$ とおけるので, 下向きの法線ベクトルは $\vec{n} = (\tan\theta(t), -1)$ となる。

$$\text{すると, } |\vec{n}| = \sqrt{\tan^2\theta(t) + 1} = \frac{1}{\cos\theta(t)} \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OP} + \cos\theta(t)\vec{n} = (t, f(t)) + \cos\theta(t)(\tan\theta(t), -1) \\ &= (t, f(t)) + (\sin\theta(t), -\cos\theta(t)) = (t + \sin\theta(t), f(t) - \cos\theta(t)) \end{aligned}$$

よって, $\alpha(t) = t + \sin\theta(t)$, $\beta(t) = f(t) - \cos\theta(t)$

(3) (1)より, $1 + \{f'(t)\}^2 = 1 + \tan^2\theta(t) = \frac{1}{\cos^2\theta(t)}$ なので,

$$L_1 = \int_a^b \sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta(t)}} dt = \int_a^b \frac{1}{\cos\theta(t)} dt$$

$$\begin{aligned} \text{(2)から, } \{\alpha'(t)\}^2 + \{\beta'(t)\}^2 &= \{1 + \cos\theta(t)\theta'(t)\}^2 + \{f'(t) + \sin\theta(t)\theta'(t)\}^2 \\ &= \{1 + \cos\theta(t)\theta'(t)\}^2 + \{\tan\theta(t) + \sin\theta(t)\theta'(t)\}^2 \\ &= \{1 + \cos\theta(t)\theta'(t)\}^2 \{1 + \tan^2\theta(t)\} = \frac{\{1 + \cos\theta(t)\theta'(t)\}^2}{\cos^2\theta(t)} \end{aligned}$$

$$L_2 = \int_a^b \sqrt{\frac{\{1 + \cos\theta(t)\theta'(t)\}^2}{\cos^2\theta(t)}} dt = \int_a^b \frac{1 + \cos\theta(t)\theta'(t)}{\cos\theta(t)} dt$$

$$\text{よって, } L_2 - L_1 = \int_a^b \frac{\cos\theta(t)\theta'(t)}{\cos\theta(t)} dt = \int_a^b \theta'(t) dt = [\theta(t)]_a^b = \theta(b) - \theta(a)$$

[解 説]

ていねいな誘導がついた, よく練られた問題です。(3)の結論は予想以上に簡明なものでした。

5b

問題のページへ

$$(1) \text{ 条件より, } \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

$$\text{また, } \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{24-18} \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(2) (1)\text{より, } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6p-9q \\ -2p+4q \end{pmatrix}$$

$$x = p - \frac{3}{2}q \dots\dots\dots, \quad y = -\frac{1}{3}p + \frac{2}{3}q \dots\dots\dots$$

より, x が整数となる条件は, q が偶数となることであり, $0 \leq q \leq 5$ より, $q = 0, 2, 4$ である。

$q = 0$ のとき, より $y = -\frac{1}{3}p$ となり, y が整数となる条件は p が 3 の倍数である。すなわち, $0 \leq p \leq 5$ から $p = 0, 3$ である。

$q = 2$ のとき, より $y = -\frac{1}{3}p + \frac{4}{3}$ となり, y が整数となる条件は $-p+4$ が 3 の倍数である。すなわち, $0 \leq p \leq 5$ から $p = 1, 4$ である。

$q = 4$ のとき, より $y = -\frac{1}{3}p + \frac{8}{3}$ となり, y が整数となる条件は $-p+8$ が 3 の倍数である。すなわち, $0 \leq p \leq 5$ から $p = 2, 5$ である。

以上より, $(p, q) = (0, 0), (3, 0), (1, 2), (4, 2), (2, 4), (5, 4)$

$$(3) \text{ より } x = \frac{2p-3q}{2}, \quad \text{より } y = \frac{-p+2q}{3}$$

$d = 6$ とすると, $2p-3q$ は偶数となり, $-p+2q$ は 3 の倍数となる。このとき, x, y はともに整数であり, 題意の正の整数 d は存在する。

(4) 5 以下の d が存在すると仮定する。

ところが, $d = 5$ のときは $(p, q) = (5, 5)$, $d = 4$ のときは $(p, q) = (4, 4)$, $d = 3$ のときは $(p, q) = (3, 3)$, $d = 2$ のときは $(p, q) = (2, 2)$, $d = 1$ のときは $(p, q) = (1, 1)$ が, (2) より満たしていないことがわかる。

よって, d のうちで最小のものは 6 である。

[解 説]

(2) からは整数問題になっていますが, $0 \leq p \leq 5, 0 \leq q \leq 5$ ととりうる値の範囲が狭いので, そんなに面倒ではありません。