1

解答解説のページへ

関数 $f(x)=\dfrac{2}{3}ax^3+(a+b)x^2+(b+1)x$ を考える。

(1)　関数 $f(x)$ がつねに増加するための a, b の条件を求め，その範囲を ab 平面上に図示せよ。

(2)　$a=0$ のとき，関数 $f(x)$ が $x>-1$ においてつねに増加するための b の条件を求めよ。

(3)　関数 $f(x)$ が $x>-1$ においてつねに増加するための a, b の条件を求め，その範囲を ab 平面上に図示せよ。

2　　解答解説のページへ

3 次関数 $y=x^3+ax^2+bx+c$ のグラフを G とする。

(1) xy 平面上の点 $(p,\ q)$ に関する，点 $(X,\ Y)$ に対称な点の座標を求めよ。

(2) G はこの上のある点に関して点対称であることを示せ。

(3) 直線 $mx+ny=0$ に関する，点 $(X,\ Y)$ に対称な点の座標を求めよ。ただし，m，n は共には 0 でないとする。

(4) G は原点を通るどんな直線に関しても線対称でないことを示せ。

3

解答解説のページへ

空間内に以下のような円柱と正四角柱を考える。円柱の中心軸は x 軸で，中心軸に直交する平面による切り口は半径 r の円である。正四角柱の中心軸は z 軸で，xy 平面による切り口は 1 辺の長さが $\dfrac{2\sqrt{2}}{r}$ の正方形で，その正方形の対角線は x 軸と y 軸である。$0<r\leqq\sqrt{2}$ とし，円柱と正四角柱の共通部分を K とする。

(1)　高さが $z=t\ (-r\leqq t\leqq r)$ で xy 平面に平行な平面と K との交わりの面積を求めよ。

(2)　K の体積 $V(r)$ を求めよ。

(3)　$0<r\leqq\sqrt{2}$ における $V(r)$ の最大値を求めよ。

4a

解答解説のページへ

複素数平面上の点 z を考える。

(1) 実数 $a,\ c$ と複素数 b が $|b|^2-ac>0$ を満たすとき，$az\overline{z}+\overline{b}z+b\overline{z}+c=0$ を満たす点 z は $a\neq 0$ のとき，どのような図形を描くか。ただし，$\overline{z}$ は z に共役な複素数を表す。

(2) 0 でない複素数 d と複素数平面上の異なる 2 点 $p,\ q$ に対して

$$d(z-p)(\overline{z}-\overline{q})=\overline{d}(z-q)(\overline{z}-\overline{p})$$

を満たす点 z はどのような図形を描くか。

4b

解答解説のページへ

サイコロを n 回振って，出た目を小さい方から順に並べ，第 i 番目を $X_i\ (i=1,\ \cdots,\ n)$ とする。

(1)　$n=7$ のとき, 3 の目が 3 回, 5 の目が 2 回出たとする。このとき X_4 のとりうる値をすべて求めよ。

(2)　一般の n に対して，$X_1=2$ となる確率 $P(X_1=2)$ を求めよ。

(3)　一般の n に対して，X_1 の期待値 $E(X_1)$ を求めよ。

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(E(X_1)-1)$ を求めよ。ここで log は自然対数を表す。

(5)　一般の n に対して，期待値 $E(X_1+X_n)$ を求めよ。

5a　解答解説のページへ

関数 $f(x)$ の第 2 次導関数はつねに正とし，関数 $y=f(x)$ のグラフ G 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における接線と x 軸のなす角を $\theta(t)$ とする。ただし，$\theta(t)$ は $-\dfrac{\pi}{2}<\theta(t)<\dfrac{\pi}{2}$ で接線の傾きが正，負，0 に従って正，負，0 の値をとるものとする。また，点 P における G の法線上に P から距離 1 の点 $\mathrm{Q}(\alpha(t),\ \beta(t))$ を G の下側にとる。

(1)　$\theta(t)$ はつねに増加することを示せ。

(2)　$\alpha(t)$，$\beta(t)$ を求めよ。

(3)　t が a から b（$a<b$）まで変化するとき，点 P，Q が描く曲線の長さをそれぞれ L_1，L_2 とする。L_2-L_1 を $\theta(a)$ と $\theta(b)$ を用いて表せ。

5b　　解答解説のページへ

$p,\ q$ を整数とし, $x,\ y$ を未知数とする連立 1 次方程式

$$4x+9y=p\ ,\ \ 2x+6y=q$$

を考える。

(1)　この方程式を行列を用いて表し, 係数行列の逆行列を求めよ。

(2)　上の連立方程式の解 $x,\ y$ が共に整数であるような組$(p,\ q)$をすべて求めよ。ただし, $0\leqq p\leqq 5,\ 0\leqq q\leqq 5$ とする。

(3)　正の数 d で「d のどんな倍数 $p,\ q$ に対しても上の連立方程式の解 $x,\ y$ が整数になる」ものが存在することを示せ。

(4)　(3)における d のうちで最小のものを求めよ。