

1

問題のページへ

(1) 合同を記号「 \equiv 」で表す。まず、1 次の M 多項式は x , $x+1$ だけなので、これらの積は、 x^2 , $x(x+1) = x^2 + x$, $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 \equiv x^2 + 1$ となり、いずれも $x^2 + x + 1$ と合同でない。

よって、 $x^2 + x + 1$ は既約な M 多項式である。

(2) 1 次の M 多項式は、 x , $x+1$ でともに既約である。

2 次の M 多項式は、 x^2 , $x^2 + 1$, $x^2 + x$, $x^2 + x + 1$ であり、既約なのは(1)より $x^2 + x + 1$ だけである。

3 次の M 多項式は、 x^3 , $x^3 + 1$, $x^3 + x$, $x^3 + x + 1$, $x^3 + x^2$, $x^3 + x^2 + 1$, $x^3 + x^2 + x$, $x^3 + x^2 + x + 1$ である。

ここで、3 次の可約な M 多項式は、

$$x^3, x^2(x+1) = x^3 + x^2, x(x+1)^2 \equiv x(x^2 + 1) = x^3 + x$$

$$(x+1)^3 \equiv (x+1)(x^2 + 1) = x^3 + x^2 + x + 1$$

$$x(x^2 + x + 1) = x^3 + x^2 + x$$

$$(x+1)(x^2 + x + 1) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1 \equiv x^3 + 1$$

よって、3 次の既約な M 多項式は、 $x^3 + x + 1$, $x^3 + x^2 + 1$ となる。

以上より、3 次以下の既約な M 多項式は、

$$x, x+1, x^2 + x + 1, x^3 + x + 1, x^3 + x^2 + 1$$

(3) 定数項が 1 である 4 次の可約な M 多項式をつくると、

$$(x+1)^4 = (x+1)^2(x+1)^2 \equiv (x^2 + 1)(x^2 + 1) = x^4 + 2x^2 + 1 \equiv x^4 + 1$$

$$(x+1)^2(x^2 + x + 1) \equiv (x^2 + 1)(x^2 + x + 1) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$$

$$\equiv x^4 + x^3 + x + 1$$

$$(x+1)(x^3 + x + 1) = x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 1 \equiv x^4 + x^3 + x^2 + 1$$

$$(x+1)(x^3 + x^2 + 1) = x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 1 \equiv x^4 + x^2 + x + 1$$

$$(x^2 + x + 1)^2 = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \equiv x^4 + x^2 + 1$$

以上より、 $x^4 + x + 1$ は既約な M 多項式である。

[解 説]

題意を理解して、既約な M 多項式の積を考えればよいというのを把握するのに時間がかかります。なお、本問は理系では必答、文系では選択題となっています。

2

問題のページへ

(1) $y = -ax^2 + b \dots\dots$ と $x^2 + y^2 = 1 \dots\dots$ が接していることより、

から、 $x^2 = 1 - y^2$

に代入して、 $y = -a(1 - y^2) + b$

$ay^2 - y - a + b = 0 \dots\dots\dots$

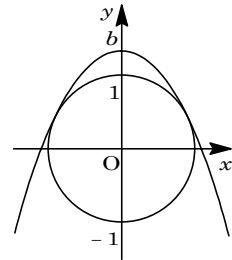
$a > 0$ より、 が重解 $y = \frac{1}{2a}$ を $0 < y < 1$ にもつので、

$D = 1 + 4a(a - b) = 0, 0 < \frac{1}{2a} < 1$

よって、 $a > \frac{1}{2}$ において、 $b = \frac{4a^2 + 1}{4a} \dots\dots\dots$

このとき、 から $x^2 = 1 - \frac{1}{4a^2} = \frac{4a^2 - 1}{4a^2}$, $x = \pm \frac{\sqrt{4a^2 - 1}}{2a}$ となるので、接点の

座標は、 $\left(\pm \frac{\sqrt{4a^2 - 1}}{2a}, \frac{1}{2a} \right)$ となる。



(2) (1)より、 $V = \int_0^b \pi x^2 dy = \pi \int_0^b -\frac{y-b}{a} dy = -\frac{\pi}{a} \left[\frac{1}{2} y^2 - by \right]_0^b = \frac{\pi b^2}{2a}$
 $= \frac{\pi}{2a} \cdot \frac{(4a^2 + 1)^2}{16a^2} = \frac{\pi(4a^2 + 1)^2}{32a^3}$

(3) $f(a) = \frac{(4a^2 + 1)^2}{a^3}$ とおくと、 $V = \frac{\pi}{32} f(a)$ となる。

$f'(a) = \frac{16a(4a^2 + 1) \cdot a^3 - (4a^2 + 1)^2 \cdot 3a^2}{a^6}$
 $= \frac{(4a^2 + 1)(4a^2 - 3)}{a^4}$
 $= \frac{(4a^2 + 1)(2a - \sqrt{3})(2a + \sqrt{3})}{a^4}$

a	$\frac{1}{2}$	\dots	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	\dots
$f'(a)$		-	0	+
$f(a)$		\searrow		\nearrow

右表より、 $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき $f(a)$ は最小値をとる。このとき より、 $b = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

また最小値は、 $V = \frac{\pi}{32} f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{128}{3\sqrt{3}} = \frac{4}{9}\sqrt{3}\pi$

[解 説]

第 1 問と異なり、定型的な問題です。短時間でゲットしたい問題です。

3

問題のページへ

$$(1) \quad t \neq 1 \text{ のとき, } 1+t+t^2+\cdots+t^{n-1} = \frac{1-t^n}{1-t} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}$$

$x < 1$ として, 両辺を 0 から x まで積分すると,

$$\int_0^x (1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}) dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$$

$$\left[t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \cdots + \frac{t^n}{n} \right]_0^x = -\left[\log|1-t| \right]_0^x - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$$

$$\text{よって, } f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} = -\log(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$$

$$(2) \quad \text{まず, } 0 < t < x < \frac{1}{3} \text{ において, } \frac{t^n}{1-t} < \frac{t^n}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3t^n}{2} \text{ より,}$$

$$\int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt < \int_0^x \frac{3t^n}{2} dt = \frac{3}{2} \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^x = \frac{3x^{n+1}}{2(n+1)}$$

$$\text{また, } -\frac{1}{3} < x < t < 0 \text{ において, } \left| \frac{t^n}{1-t} \right| = \frac{|t|^n}{|1-t|} \quad |t|^n = (-t)^n$$

$$\left| \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \right| = \left| \int_x^0 \frac{t^n}{1-t} dt \right| = \left| \int_x^0 (-t)^n dt \right| = (-1)^n \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_x^0 = (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\text{よって, } \left| \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \right| < \frac{(-x)^{n+1}}{n+1} = \frac{|x|^{n+1}}{n+1}$$

$$\text{さて, (1) より, } f(x) + \log(1-x) = -\int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \dots \dots \text{ なので,}$$

$$f(-x) + \log(1+x) = -\int_0^{-x} \frac{t^n}{1-t} dt \dots \dots$$

$$\text{より, } f(x) - f(-x) + \log(1-x) - \log(1+x) = -\int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt + \int_0^{-x} \frac{t^n}{1-t} dt$$

$$f(x) - f(-x) - \log \frac{1+x}{1-x} = -\int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt - \int_{-x}^0 \frac{t^n}{1-t} dt$$

$$\left| f(x) - f(-x) - \log \frac{1+x}{1-x} \right| = \left| \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt + \int_{-x}^0 \frac{t^n}{1-t} dt \right|$$

$$\left| \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \right| + \left| \int_{-x}^0 \frac{t^n}{1-t} dt \right| \dots \dots$$

$$(i) \quad 0 < x < \frac{1}{3} \text{ のとき } \left| \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \right| = \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt < \frac{3x^{n+1}}{2(n+1)} = \frac{3|x|^{n+1}}{2(n+1)}$$

$$\left| \int_{-x}^0 \frac{t^n}{1-t} dt \right| = \left| \int_0^{-x} \frac{t^n}{1-t} dt \right| = \frac{|-x|^{n+1}}{n+1} = \frac{|x|^{n+1}}{n+1}$$

$$(ii) \quad -\frac{1}{3} \leq x < 0 \text{ のとき} \quad \left| \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \right| = \frac{|x|^{n+1}}{n+1}$$

$$\left| \int_{-x}^0 \frac{t^n}{1-t} dt \right| = \left| \int_0^{-x} \frac{t^n}{1-t} dt \right| = \frac{3(-x)^{n+1}}{2(n+1)} = \frac{3|x|^{n+1}}{2(n+1)}$$

$$(i)(ii) \text{ のいずれの場合も } \quad \left| f(x) - f(-x) - \log \frac{1+x}{1-x} \right| = \frac{5|x|^{n+1}}{2(n+1)} \dots\dots\dots$$

$$(3) \quad \text{に } x = \frac{1}{3} \text{ を代入すると, } \left| f\left(\frac{1}{3}\right) - f\left(-\frac{1}{3}\right) - \log 2 \right| = \frac{5\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{2(n+1)}$$

$$n = 2 \text{ のとき, } \frac{5\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{2(n+1)} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{5}{162} > \frac{1}{100}$$

$$n = 3 \text{ のとき, } \frac{5\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{2(n+1)} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{5}{648} < \frac{1}{100}$$

よって、 $n = 3$ のとき、 $\log 2$ と $f\left(\frac{1}{3}\right) - f\left(-\frac{1}{3}\right)$ との誤差は $\frac{1}{100}$ 以下となるので、

求める $\log 2$ の近似値は、

$$f\left(\frac{1}{3}\right) - f\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{27}\right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{27}\right) = \frac{56}{81}$$

[解 説]

(3)の結論を導くのに、たいへん丁寧な誘導がつけられています。しかし、それにしても解を書くのに時間がかかります。

4a

問題のページへ

$$(1) \alpha = z + \bar{z} = (\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ) + (\cos 20^\circ - i \sin 20^\circ) = 2 \cos 20^\circ \text{ から, } \cos 20^\circ = \frac{\alpha}{2}$$

ここで, $\cos 60^\circ = 4 \cos^3 20^\circ - 3 \cos 20^\circ$ より,

$$\frac{1}{2} = 4 \cdot \frac{\alpha^3}{8} - 3 \cdot \frac{\alpha}{2}, \quad \alpha^3 - 3\alpha - 1 = 0 \dots\dots$$

よって, α は 3 次方程式 $x^3 - 3x - 1 = 0 \dots\dots$ の解である。

$$(2) f(x) = x^3 - 3x - 1 \text{ とおくと,}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

$$f(-1) > 0, f(1) < 0 \text{ より, } f(x) = 0 \text{ は } 3$$

個の実数解をもつ。

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	1	↘	-3	↗

ここで, この解が有理数であると仮定すると, $p > 0$ で p と q を互いに素な整数として, $x = \frac{q}{p}$ とおくことができる。

$$\text{より, } \frac{q^3}{p^3} - 3 \cdot \frac{q}{p} - 1 = 0, \quad q^3 - 3p^2q - p^3 = 0, \quad q^3 = p^2(3q + p)$$

p^2 は q^3 の約数となるが, p と q は互いに素な整数なので, $p = 1$ となる。すなわち, $f(x) = 0$ の解はすべて整数となる。

ところが, $f(-2) = -3 < 0$, $f(-1) = 1 > 0$, $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = -3 < 0$, $f(2) = 1 > 0$ より, $f(x) = 0$ の解は $-2 < x < -1$, $-1 < x < 0$, $1 < x < 2$ に 1 つずつあり, 整数解は存在しない。

したがって, 3 個の実数解は, いずれも有理数ではない。

$$(3) a, b \text{ を有理数として, } x = \alpha \text{ を解とする 2 次方程式を, 一般性を失うことなく } x^2 + ax + b = 0 \text{ とできるので, } \alpha^2 + a\alpha + b = 0 \dots\dots \text{ となる。}$$

ここで, $x^3 - 3x - 1$ を $x^2 + ax + b$ で割ると,

$$x^3 - 3x - 1 = (x^2 + ax + b)(x - a) + (a^2 - b - 3)x + (ab - 1) \dots\dots$$

$$x = \alpha \text{ を に代入すると, } \text{より } (a^2 - b - 3)\alpha + (ab - 1) = 0$$

$$a, b \text{ は有理数, } \alpha \text{ は無理数なので, } a^2 - b - 3 = 0 \dots\dots, \quad ab - 1 = 0 \dots\dots$$

より $b = a^2 - 3$ となり, に代入して $a^3 - 3a - 1 = 0$ となるが, この方程式の解は(2)より有理数でない。よって, は成立しない。

以上より, 有理数を係数とする 2 次方程式で, α を解とするものは存在しない。

[解 説]

さまざまな分野の融合したおもしろい問題です。選択という扱いでは, 惜しい気もします。

4b

問題のページへ

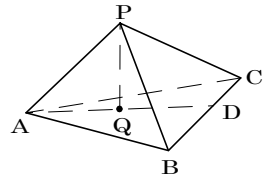
(1) BC を 2 : 1 に内分する点を D とすると,

$$\overrightarrow{DP} = \frac{\overrightarrow{BP} + 2\overrightarrow{CP}}{3}, \quad \overrightarrow{BP} + 2\overrightarrow{CP} = 3\overrightarrow{DP}$$

条件より, $\overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{BP} + 2\overrightarrow{CP}) = 0$ なので, $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{DP} = 0$

よって, $\overrightarrow{AP} = \vec{0}$ または $\overrightarrow{DP} = \vec{0}$ または $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{DP}$ より, 点 P は 2 点 A, D を直径の両端とする球を描く。すなわち 2 点 P, Q の距離が一定である定点 Q は, この球の中心で, 線分 AD の中点である。

ここで, $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ より, $D\left(0, \frac{b}{3}, \frac{2c}{3}\right)$ となり, $Q\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{6}, \frac{c}{3}\right)$ である。



$$(2) (1) \text{より}, \quad \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}}{3} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

よって, 点 Q は 3 点 A, B, C を通る平面上にある。

(3) まず, $\overrightarrow{AB} = (-a, b, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-a, 0, c)$ から,

$$\begin{aligned} ABC &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2) - a^4} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2} \end{aligned}$$

$$\text{また, 球の半径は, } AQ = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{6}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^2} = \frac{1}{6} \sqrt{9a^2 + b^2 + 4c^2}$$

四面体 ABCP の体積が最大となるのは, PQ が平面 ABC に垂直なときなので, $PQ = AQ$ より, その最大値 V は,

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2} \cdot \frac{1}{6} \sqrt{9a^2 + b^2 + 4c^2} \\ &= \frac{1}{36} \sqrt{(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2)(9a^2 + b^2 + 4c^2)} \end{aligned}$$

[解 説]

空間ベクトルの基本題です。省略した算法とコンピュータ分野の問題も含めて, 理系の第 4 問は本問を選択するのがベストです。

5a

問題のページへ

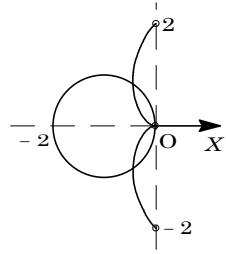
(1) C_1 は $r = 2 \cos(\pi + \theta) = -2 \cos \theta \dots\dots$ より、原点と点 $(2, \pi)$ を直径の両端とする円となる。ただし、 $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ より原点を除く。

また、 C_2 は $r = 2(\cos \theta + 1) \dots\dots$ よりカージオイドを表し、 $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ よりその一部分となる。なお、両端の 2 点

$(2, \frac{\pi}{2}), (2, \frac{3\pi}{2})$ は除く。

さらに、 C_1, C_2 の交点は、より $-2 \cos \theta = 2(\cos \theta + 1)$ から、 $\cos \theta = -\frac{1}{2}$

よって、 $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ より $\theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ となり、より $r = -2 \cdot (-\frac{1}{2}) = 1$ となるので、交点は $(1, \frac{2\pi}{3}), (1, \frac{4\pi}{3})$ である。

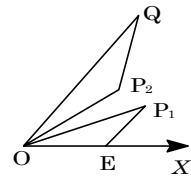


(2) $OE P_1 \quad OP_2 Q$ より、 $OP_1 : OQ = OE : OP_2$

$$OQ = \frac{OP_1 \cdot OP_2}{OE} = r_1 r_2$$

また、 $\angle EOP_1 = \angle P_2 OQ$ より、 $\angle EOQ = \theta_1 + \theta_2$

よって、点 Q すなわち $P_1 * P_2$ の座標は、 $(r_1 r_2, \theta_1 + \theta_2)$

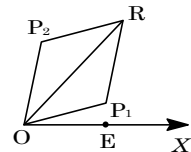


(3) $OP_1 = OP_2$ より、平行四辺形 $OP_1 R P_2$ はひし形となる。

OR は $\angle P_1 O P_2$ の二等分線となり、 $\angle EOR = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$

$$OR = 2OP_1 \cos \angle P_1 O R = 2r \cos \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}$$

よって、点 R すなわち $P_1 \circ P_2$ の座標は、 $(2r \cos \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}, \frac{\theta_1 + \theta_2}{2})$



(4) まず、 $V(1, \frac{2\pi}{3})$ のとき、点 $V * V$ は $(1, \frac{4\pi}{3})$ 、 $V \circ (V * V)$ は $(2 \cos \frac{\pi}{3}, \pi)$ より $(1, \pi)$ となる。また、 $V(1, \frac{4\pi}{3})$ のとき、点 $V * V$ は $(1, \frac{8\pi}{3})$ すなわち $(1, \frac{2\pi}{3})$ 、 $V \circ (V * V)$ は $(2 \cos \frac{\pi}{3}, \pi)$ より $(1, \pi)$ となる。

すると、いずれの場合も $V \circ (V * V)$ は $(1, \pi)$ となり、点 $k(V \circ (V * V))$ の偏角は、 $k > 0$ のとき $\pi, k < 0$ のとき 2π である。

よって、この点が曲線 C_1 上にある条件は、(1) より $k = 2$ である。

[解 説]

(1) の曲線を描くときの説明は、この程度でよいのかどうか迷います。

5b

問題のページへ

$$(1) P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{で, } QP = E \text{ より, } Q = P^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{より, } Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ -2a_1 + c_1 & -2a_2 + c_2 & -2a_3 + c_3 & -2a_4 + c_4 \end{pmatrix}$$

(3) (1)より P^{-1} が存在するので, $PAX = PB$ に左からかけて,

$$P^{-1}PAX = P^{-1}PB, \quad EAX = EB, \quad AX = B$$

$$(4) \text{条件より, } \begin{cases} 3x - 2y + z = a \\ -3x + 4y - 5z = b \\ 6x - 5y + 4z = c \end{cases}$$

行列の積としてまとめると,

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & -5 \\ 6 & -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \dots\dots\dots$$

を $AX = B$ として, 左から P をかけると, $PAX = PB \dots\dots\dots$

$$PA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & -5 \\ 6 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$PB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ -2a + c \end{pmatrix}$$

したがって は, $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ -2a + c \end{pmatrix}$ となる。

$$\text{求める連立 1 次方程式は, } \begin{cases} 3x - 2y + z = a \\ -3x + 4y - 5z = b \\ -y + 2z = -2a + c \end{cases}$$

$$(5) (4)より, \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & a \\ -3 & 4 & -5 & b \\ 0 & -1 & 2 & -2a+c \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & a \\ 0 & 2 & -4 & a+b \\ 0 & -1 & 2 & -2a+c \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & -3a+b+2c \\ 0 & -1 & 2 & -2a+c \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 & 5a-2c \\ 0 & 0 & 0 & -3a+b+2c \\ 0 & -1 & 2 & -2a+c \end{pmatrix}$$

よって、連立 1 次方程式が解をもつための条件は、 $-3a+b+2c=0$

このとき、 $3x-3z=5a-2c$, $-y+2z=-2a+c$

$$x-z=\frac{5}{3}a-\frac{2}{3}c, \quad y-2z=2a-c$$

t を任意の実数として、 $z=t$ とおくと、 $x=\frac{5}{3}a-\frac{2}{3}c+t$, $y=2a-c+2t$ から、

$$(x, y, z) = \left(\frac{5}{3}a - \frac{2}{3}c + t, 2a - c + 2t, t \right)$$

[解 説]

(1)は普通に消去法で逆行列を求めてしまいましたが、その後の設問を読むと、出題者の意図に反しているように思えました。同じことは(5)にも当てはまり、行の交換などはせずに、消去法については知らぬふりをして解くのが正しい姿勢なのかという疑問も湧いてきます。なお、省略した統計の問題も含めて、理系の第 5 問は、上記の点はあるにせよ、本問を選択するのがベストでしょう。