1　解答解説のページへ

係数が 0 か 1 である x の整式を，ここでは M 多項式とよぶことにする。整数を係数とする x の整式は，偶数の係数を 0 でおきかえ，奇数の係数を 1 でおきかえると M 多項式になる。2 つの整式は，このおきかえによって等しくなるとき合同であるという。たとえば，$5x^2+4x+3$ と x^2-1 とは対応する M 多項式がともに x^2+1 となるので，合同である。

M 多項式は，2 つの 1 次以上の M 多項式の積と合同になるとき可約であるといい，可約でないとき既約であるという。たとえば，x^2+1 は $(x+1)^2$ と合同であるから，可約である。

(1)　x^2+x+1 は既約な M 多項式であることを示せ。

(2)　1 次から 3 次までの既約な多項式をすべて求めよ。

(3)　x^4+x+1 は既約な M 多項式かどうか判定せよ。

2

解答解説のページへ

定数 a, b を係数とする 2 次関数 $y=-ax^2+b$ のグラフが, 原点を中心とする半径 1 の円と異なる 2 点で接しているとする。ただし, $a>0$ とする。

(1) a, b の条件式, および接点の座標を求めよ。

(2) 与えられた 2 次関数のグラフと x 軸とで囲まれる部分を, y 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積 V を a を用いて表せ。

(3) V を最小にする a, b の値, およびそのときの V の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

n を自然数として，$f(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}$ とおく。

(1)　$x<1$ において，$f(x)=-\log(1-x)-\displaystyle\int_0^x\frac{t^n}{1-t}dt$ が成り立つことを示せ。ここで，log は自然対数を表す。

(2)　$|x|\leqq\dfrac{1}{3}$ とするとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

(i)　$x\geqq 0$ において，$\displaystyle\int_0^x\frac{t^n}{1-t}dt\leqq\frac{3x^{n+1}}{2(n+1)}$

(ii)　$x<0$ において，$\left|\displaystyle\int_0^x\frac{t^n}{1-t}dt\right|\leqq\dfrac{|x|^{n+1}}{n+1}$

(iii)　$\left|f(x)-f(-x)-\log\dfrac{1+x}{1-x}\right|\leqq\dfrac{5|x|^{n+1}}{2(n+1)}$

(3)　この不等式を用いて, log2 の近似値を誤差が $\dfrac{1}{100}$ 以下となるような分数で求めよ。

4a

解答解説のページへ

複素数 $z=\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ$ と，それに共役な複素数 $\overline{z}$ に対し，$\alpha = z+\overline{z}$ とする。

(1)　α は整数を係数とするある 3 次方程式の解となることを示せ。

(2)　この 3 次方程式は 3 個の実数解をもち，そのいずれも有理数ではないことを示せ。

(3)　有理数を係数とする 2 次方程式で，α を解とするものは存在しないことを背理法を用いて示せ。

4b　　解答解説のページへ

$a,\ b,\ c$ を 0 でない実数として，空間内に 3 点 $\mathrm{A}(a,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ b,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ c)$をとる。

(1)　空間内の点 P が $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{BP}}+2\overrightarrow{\mathrm{CP}})=0$ を満たしながら動くとき，この点 P はある定点 Q から一定の距離にあることを示せ。

(2)　(1)における定点 Q は 3 点 A, B, C を通る平面上にあることを示せ。

(3)　(1)における P について，四面体 ABCP の体積の最大値を求めよ。

5a

解答解説のページへ

平面上の点の極座標を，原点 O からの距離 $r(\geqq 0)$ と偏角 θ を用いて $(r,\ \theta)$ で表す。

(1) 平面上の 2 曲線

$$C_1 : r = 2\cos(\pi+\theta),\ C_2 : r = 2(\cos\theta+1)\ \left(\text{ただし}\ \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}\right)$$

の概形を描き，この 2 曲線 C_1，C_2 の交点の極座標を求めよ。

(2) 平面上の 3 点 P_1，P_2，E の極座標をそれぞれ $(r_1,\ \theta_1)$，$(r_2,\ \theta_2)$，$(1,\ 0)$ とするとき，三角形 OEP_1 と三角形 $\mathrm{OP}_2\mathrm{Q}$ とが相似となる点 Q を $\mathrm{P}_1 * \mathrm{P}_2$ で表す。点 $\mathrm{P}_1 * \mathrm{P}_2$ の極座標を求めよ。ただし，点 Q は $\angle\mathrm{EOP}_1 = \angle\mathrm{P}_2\mathrm{OQ}$ となるように向きも込めて定める。

(3) 3 点 O，P_1，P_2 が同一直線上にないとき，四辺形 $\mathrm{OP}_1\mathrm{RP}_2$ が平行四辺形となるような点 R を $\mathrm{P}_1 \circ \mathrm{P}_2$ で表す。P_1，P_2 の極座標が $(r_1,\ \theta_1)$，$(r_2,\ \theta_2)$ で $r_1 = r_2 = r$ のとき，点 $\mathrm{P}_1 \circ \mathrm{P}_2$ の極座標を求めよ。

(4) さらに，平面上の点 P の極座標を $(r,\ \theta)$ として，実数 k に対し点 $k\mathrm{P}$ を，$k \geqq 0$ のときは極座標が $(kr,\ \theta)$ となる点，$k < 0$ のときは極座標が $(|k|r,\ \theta+\pi)$ となる点とする。(1)で求めた 2 曲線 C_1，C_2 の交点を V として，点 $k(\mathrm{V} \circ (\mathrm{V} * \mathrm{V}))$ が曲線 C_1 上にあるための k の条件を求めよ。

5b　　解答解説のページへ

3 次単位行列 E の第 1 行の -2 倍を第 3 行に加えた行列を P とする。

(1)　$QP=E$ となる行列 Q を求めよ。

(2)　行列 $R=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}$ について，$S=PR$ を求めよ。

(3)　3×3 行列 A と 3×1 行列 B が与えられているとき，$PAX=PB$ を満たす行列 X は，また $AX=B$ を満たすことを示せ。

(4)　$x,\ y,\ z$ を未知数とする連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 3x-2y+z=a \\ -3x+4y-5z=b \\ 6x-5y+4z=c \end{cases}$$

の係数が作る行列を A として，この方程式を $AX=B$ で表すとき，この両辺に左から P をかけた連立 1 次方程式を書け。

(5)　上と同様の操作を繰り返すことより，(4)で与えた連立 1 次方程式が解をもつための条件を求め，解があるときはその解をすべて求めよ。