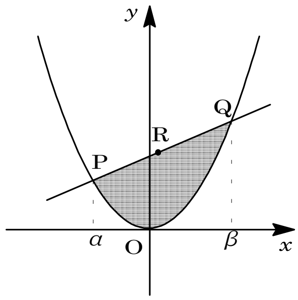
1

問題のページへ



$\mathrm{P}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{Q}(\beta,\ \beta^2)$（$\alpha<\beta$）とするとき，

放物線 $y=x^2$ と線分 PQ が囲む部分の面積 S は，

$$S=\int_\alpha^\beta -(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

条件より，$\dfrac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=1$，$(\beta-\alpha)^3=6$

$$\left\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\right\}^{\frac{3}{2}}=6\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$\mathrm{R}(x,\ y)$ とすると，

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2}\cdots\cdots\cdots②,\quad y=\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{2}\cdots\cdots\cdots③$$

②より，$\alpha+\beta=2x\cdots\cdots\cdots$④

③④より，$\alpha\beta=-y+\dfrac{(\alpha+\beta)^2}{2}=-y+2x^2\cdots\cdots\cdots$⑤

④⑤を①に代入して，

$$(4y-4x^2)^{\frac{3}{2}}=6,\quad y=x^2+\frac{\sqrt[3]{36}}{4}$$

[解 説]

数Ⅱの微積分の典型問題です。途中の式変形も難しいところはありませんでした。なお，①より α，β が実数という条件は満たされています。

2

問題のページへ

△ABP に余弦定理を適用して,

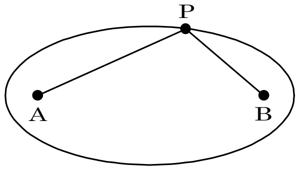
$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} = \frac{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2}{2} \cdots\cdots\cdots①$$

なお，①は 3 点 P, A, B が同一直線上にあるときも成立する。

条件より，$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PB}}| + \overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} = c \cdots\cdots\cdots②$

①を②に代入して,



$$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PB}}| + \frac{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2}{2} = c$$

$$\left(|\overrightarrow{\mathrm{PA}}| + |\overrightarrow{\mathrm{PB}}|\right)^2 = 2c + |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}| + |\overrightarrow{\mathrm{PB}}| = \sqrt{2c + |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2} \cdots\cdots\cdots③$$

$\sqrt{2c + |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2}$ は定数なので，③より点 P は 2 点 A, B を焦点とする楕円を描く。

長軸の長さは $\sqrt{2c + |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2}$，短軸の長さは $2\sqrt{\frac{1}{4}\left(2c + |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2\right) - \frac{1}{4}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2} = \sqrt{2c}$ となる。

[解 説]

2 点 A, B の中点を原点として座標設定しようかと思いましたが，条件式②の形に注目して，ベクトルの大きさと内積を余弦定理で関連づけてみました。すると，楕円の定義式が導けました。

3

問題のページへ

(1) $\dfrac{b_1^2}{a_0^2+1}+\dfrac{a_1^2}{b_0^2+1}-\dfrac{a_1^2}{a_0^2+1}-\dfrac{b_1^2}{b_0^2+1}=\dfrac{b_1^2-a_1^2}{a_0^2+1}-\dfrac{b_1^2-a_1^2}{b_0^2+1}$

$$=\frac{(b_1^2-a_1^2)(b_0^2-a_0^2)}{(a_0^2+1)(b_0^2+1)}$$

$0<a_0<b_0$，$0<a_1<b_1$ より，$\dfrac{b_1^2}{a_0^2+1}+\dfrac{a_1^2}{b_0^2+1}>\dfrac{a_1^2}{a_0^2+1}+\dfrac{b_1^2}{b_0^2+1}$

(2) まず，$1\leqq i<j\leqq n$ とし，$x_i=y_j$，$x_j=y_i$，$x_k=y_k$ $(k\neq i,\ k\neq j)$ とすると，条件より，$\{x_1,\ x_2,\cdots\cdots,x_n\}=\{y_1,\ y_2,\cdots\cdots,y_n\}=\{1,\ 2,\cdots\cdots,n\}$

さらに $x_i>x_j$ のとき，(1)より

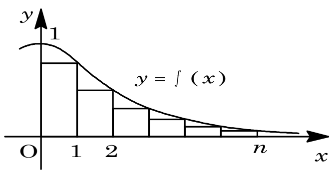
$$\frac{x_i^2}{i^2+1}+\frac{x_j^2}{j^2+1}>\frac{x_j^2}{i^2+1}+\frac{x_i^2}{j^2+1}=\frac{y_i^2}{i^2+1}+\frac{y_j^2}{j^2+1}$$

すると，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^2}{k^2+1}>\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k^2}{k^2+1}$ となり，同様にして $1\leqq p<q\leqq n$ で $x_p>x_q$ のときは，x_p の値と x_q の値を交換していくと，S_n の値は減少していく。よって，S_n の値が最小となるのは $x_1<x_2<\cdots\cdots<x_n$，すなわち $x_k=k$ のときである。

以上より，$S_n\geqq\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{k^2+1}=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2+1}\right)=n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+1}$ ………①

さて，$f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ とすると，$x>0$ で

$f'(x)=-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}<0$ となり，$f(x)$ は単調に減少する。



右図において，面積を比較して，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+1}=\sum_{k=1}^{n}f(k)<\int_0^n f(x)\,dx=\int_0^n\frac{1}{x^2+1}dx\ \cdots\cdots\cdots②$$

$x=\tan\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおき，$n=\tan\alpha$ $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると，

$$\int_0^n\frac{1}{x^2+1}dx=\int_0^\alpha\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^\alpha d\theta=\alpha<\frac{\pi}{2}<\frac{3.2}{2}=\frac{8}{5}\ \cdots\cdots\cdots③$$

①②③より，$S_n>n-\dfrac{8}{5}$，すなわち $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^2}{k^2+1}>n-\frac{8}{5}$

[解 説]

(2)の前半は，わかっているのにそれを表現するのが難しく，もどかしく感じてしまいます。87 年に東大・理で同じ考え方をする問題が出ています。

4

問題のページへ

(1)　条件 1 より△ABC は正三角形なので，以下，複号同順として，

$$\beta=\alpha+\left(\cos(\pm 60°)+i\sin(\pm 60°)\right)(\gamma-\alpha)=\alpha+\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}(\gamma-\alpha)\cdots\cdots\cdots①$$

また $\alpha=z+1$ で，条件 2 より $\gamma=3-\alpha-\beta=2-z-\beta$ となり，これらを①に代入して，$\beta=z+1+\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}(1-2z-\beta)$ より，$\left(1+\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}\right)\beta=\frac{3\pm\sqrt{3}i}{2}\mp\sqrt{3}iz$

$$\beta=\frac{2}{3\pm\sqrt{3}i}\left(\frac{3\pm\sqrt{3}i}{2}\mp\sqrt{3}iz\right)=1+\frac{-1\mp\sqrt{3}i}{2}z$$

$$\gamma=2-z-\left(1+\frac{-1\mp\sqrt{3}i}{2}z\right)=1+\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}z$$

(2)　$u=\beta-1$，$v=\gamma-1$，$\omega=\cos 120°+i\sin 120°$ とおくと，(1)より，$u=\frac{-1\mp\sqrt{3}i}{2}z$，$v=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}z$ となるので, u, v は ωz, $\omega^2 z$ のどちらかになる。

これより，3 点 z, u, v は原点を中心とする円周上にあり，しかも正三角形の頂点になっている。この 3 点を，偏角の小さいものから z_1，z_2，z_3 とするとき，これらは α，β，γ のいずれかを実軸方向に -1 だけ平行移動したものに対応する。また，この正三角形に正弦定理を適用すると，条件 1 より $|z_1|=\frac{\sqrt{3}}{2\sin 60°}=1$ となり，

$$z_1=\cos\theta+i\sin\theta\ (0°\leqq\theta<120°),\quad z_2=\omega z_1,\quad z_3=\omega^2 z_1$$

このとき，
$$\begin{aligned}\alpha\beta\gamma&=(z_1+1)(z_2+1)(z_3+1)=(z_1+1)(\omega z_1+1)(\omega^2 z_1+1)\\&=(z_1+1)(\omega^3 {z_1}^2+\omega^2 z_1+\omega z_1+1)=(z_1+1)({z_1}^2-z_1+1)\\&={z_1}^3+1=(\cos\theta+i\sin\theta)^3+1=1+\cos 3\theta+i\sin 3\theta\end{aligned}$$

条件 3 より，$(1+\cos 3\theta)^2+\sin^2 3\theta=1$ かつ $\sin 3\theta>0$

$0°\leqq\theta<120°$ で，$\cos 3\theta=-\frac{1}{2}$ かつ $\sin 3\theta>0$ より $3\theta=120°$，$\theta=40°$

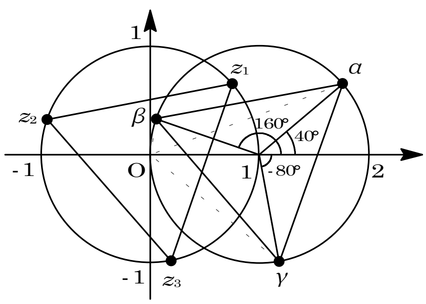
$$\arg z_2=40°+120°=160°$$

$$\arg z_3=40°+240°=280°$$

右図より，$\arg\alpha=\frac{40°}{2}=20°$

$$\arg\beta=\frac{160°}{2}=80°,$$

$$\arg\gamma=360°-\frac{80°}{2}=320°$$



[解　説]

(1)では，△ABC の重心が点 1 であるのに最初に気付けば，計算量はかなり減少します。上の解は，それに途中で気付いたものです。

$\boxed{5}$

問題のページへ

(1)　$p+q\sqrt{2}+r\sqrt{3}=0$ より，$q\sqrt{2}+r\sqrt{3}=-p$ ………①

$$(q\sqrt{2}+r\sqrt{3})^2=p^2,\ \ 2q^2+3r^2+2qr\sqrt{6}=p^2$$

$qr\neq 0$ のとき $\sqrt{6}=\dfrac{p^2-2q^2-3r^2}{2qr}$ となり，$\sqrt{6}$ が無理数であるのに反する。

よって $qr=0$ より，$q=0$ または $r=0$

$q=0$ のとき，①より $r\sqrt{3}=-p$ となる。ここで $r\neq 0$ とすると $\sqrt{3}=-\dfrac{p}{r}$ となり，$\sqrt{3}$ が無理数であるのに反する。よって $r=0$，$p=0$ となる。

$r=0$ のとき，①より $q\sqrt{2}=-p$ となる。ここで $q\neq 0$ とすると $\sqrt{2}=-\dfrac{p}{q}$ となり，$\sqrt{2}$ が無理数であるのに反する。よって $q=0$，$p=0$ となる。

以上より，いずれの場合も $p=q=r=0$ となる。

(2)　p, q, r を有理数として，$f(1)=p$，$f(1+\sqrt{2})=q$，$f(\sqrt{3})=r$ と仮定する。

$1+a+b=p$ より，$a+b=p-1$ ………②

$(1+\sqrt{2})^2+a(1+\sqrt{2})+b=q$ より，$(a+b+3)+(a+2)\sqrt{2}=q$ ………③

$3+\sqrt{3}a+b=r$ より，$\sqrt{3}a+b=r-3$ ………④

②④より，$(\sqrt{3}-1)a=r-p-2$，$a=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}(r-p-2)$ ………⑤

②⑤を③に代入して，$(p-q+2)+\dfrac{1}{2}(r-p-2)\sqrt{6}+\dfrac{1}{2}(r-p+2)\sqrt{2}=0$

$$(p-q+2)\sqrt{2}+(r-p-2)\sqrt{3}+(r-p+2)=0$$

(1)より，$p-q+2=0$，$r-p-2=0$，$r-p+2=0$

ところが，$r-p-2=0$ かつ $r-p+2=0$ は成立しないので，$f(1)$，$f(1+\sqrt{2})$，$f(\sqrt{3})$ がすべて有理数という場合はない。

よって，$f(1)$，$f(1+\sqrt{2})$，$f(\sqrt{3})$ のいずれかは無理数である。

[解 説]

(2)は，一見，難問の装いをしていますが，見た目ほどではありませんでした。(1)の結果が使えるように式変形をしていけば，自然に結論は導けます。

6

問題のページへ

$x=\dfrac{3t-t^2}{t+1}$ より，$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{(3-2t)(t+1)-(3t-t^2)}{(t+1)^2}=-\dfrac{(t+3)(t-1)}{(t+1)^2}$

$y=\dfrac{3t^2-t^3}{t+1}$ より，$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{(6t-3t^2)(t+1)-(3t^2-t^3)}{(t+1)^2}=-\dfrac{2t(t^2-3)}{(t+1)^2}$

右表より x と y の動く範囲は,

$0\leqq x\leqq 1,\ \ 0\leqq y\leqq 6\sqrt{3}-9$

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	3
$\dfrac{dx}{dt}$		$+$	0	$-$		$-$	
x	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$6-3\sqrt{3}$	$\searrow$	0
$\dfrac{dy}{dt}$	0	$+$		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$6\sqrt{3}-9$	$\searrow$	0

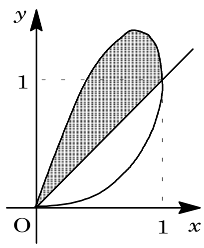
また点$(x,\ y)$の描くグラフを C とすると, C と直線 $y=x$ との共有点は,

$$\frac{3t-t^2}{t+1}=\frac{3t^2-t^3}{t+1}$$

$$t(t-1)(t-3)=0$$

$$t=0,\ 1,\ 3$$

よって, C の概形は右図のようになる。



求める面積を S とすると,

$$S=\int_0^1 y\,dx-\frac{1}{2}\cdot1\cdot1=\int_3^1\frac{3t^2-t^3}{t+1}\cdot\frac{-(t+3)(t-1)}{(t+1)^2}dt-\frac{1}{2}$$

$$=\int_1^3\frac{t^2(3-t)(t+3)(t-1)}{(t+1)^3}dt-\frac{1}{2}$$

ここで，$t+1=u$ とおくと,

$$\int_1^3\frac{t^2(3-t)(t+3)(t-1)}{(t+1)^3}dt=\int_2^4\frac{(u-1)^2(4-u)(u+2)(u-2)}{u^3}du$$

$$=\int_2^4\frac{-u^5+6u^4-5u^3-20u^2+36u-16}{u^3}du$$

$$=\int_2^4\left(-u^2+6u-5-\frac{20}{u}+\frac{36}{u^2}-\frac{16}{u^3}\right)du$$

$$=\left[-\frac{1}{3}u^3+3u^2-5u-20\log u-\frac{36}{u}+\frac{8}{u^2}\right]_2^4=\frac{89}{6}-20\log 2$$

以上より，$S=\dfrac{89}{6}-20\log 2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{43}{3}-20\log 2$

[解 説]

最後の積分計算が煩雑なのですが, 難しいところはその点だけです。内容は基本的です。