1

解答解説のページへ

n 個の異なる色を用意する。立方体の各面にいずれかの色を塗る。各面にどの色を塗るかは同様に確からしいとする。辺を共有するどの 2 つの面にも異なる色が塗られる確率を p_n とする。次の問いに答えよ。

(1)　p_4 を求めよ。

(2)　$\lim_{n\to\infty} p_n$ を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

$|x| \leqq 2$ を満たす複素数 x と，$|y-(8+6i)|=3$ を満たす複素数 y に対して，$z=\dfrac{x+y}{2}$ とする。このような複素数 z が複素数平面において動く領域を図示し，その面積を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

座標空間の 4 点 O, A, B, C は同一平面上にないとする。線分 OA の中点を P, 線分 AB の中点を Q とする。実数 x, y に対して, 直線 OC 上の点 X と, 直線 BC 上の点 Y を次のように定める。

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = x\overrightarrow{\mathrm{OC}},\quad \overrightarrow{\mathrm{BY}} = y\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

このとき, 直線 QY と直線 PX がねじれの位置にあるための x, y に関する必要十分条件を求めよ。

4

解答解説のページへ

与えられた自然数a_0に対して，自然数からなる数列a_0，a_1，a_2，…を次のように定める。

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{2} & (a_n\text{が偶数のとき})\\ \dfrac{3a_n+1}{2} & (a_n\text{が奇数のとき})\end{cases}$$

次の問いに答えよ。

(1)　a_0，a_1，a_2，a_3がすべて奇数であるような最小の自然数a_0を求めよ。

(2)　a_0，a_1，…，a_{10}がすべて奇数であるような最小の自然数a_0を求めよ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

a は $a \geqq 1$ を満たす定数とする。座標平面上で，次の 4 つの不等式が表す領域を D_a とする。

$$x \geqq 0\,,\quad \frac{e^x - e^{-x}}{2} \leqq y\,,\quad y \leqq \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,,\quad y \leqq a$$

次の問いに答えよ。

(1)　D_a の面積 S_a を求めよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{a \to \infty} S_a$ を求めよ。

6

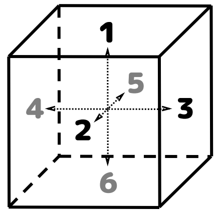
解答解説のページへ

自然数 k に対して，$a_k = 2^{\sqrt{k}}$ とする。n を自然数とし，a_k の整数部分が n 桁であるような k の個数を N_n とする。また，a_k の整数部分が n 桁であり，その最高次の数字が 1 であるような k の個数を L_n とする。次を求めよ。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{L_n}{N_n}$

ただし，例えば実数 2345.678 の整数部分 2345 は 4 桁で，最高次の数字は 2 である。

1

問題のページへ



まず，右図のように，立方体の面に，1 と 6，2 と 5，3 と 4 が対面になるように印をつける。そして，辺を共有するどの 2 つの面にも異なる色が塗られることを「塗り分ける」とよぶ。

(1)　4 色 A，B，C，D を用意し，立方体の各面を塗るとき，4^6 通りの場合が同様に確からしいとする。

このとき，立方体を塗り分けるには，3 色または 4 色が必要で，

(i)　3 色で塗るとき

3 色の選び方が ${}_4\mathrm{C}_3=4$ 通りで，塗り分けのパターンは，対面 1 と 6，対面 2 と 5，対面 3 と 4 が同色のときだけで 1 通りとなる。そして，このときの面と色との対応は $3!$ 通りずつある。

すると，3 色で塗り分けるときの確率は $\dfrac{4\times1\times3!}{4^6}=\dfrac{3}{2^9}$ となる。

(ii)　4 色で塗るとき

塗り分けのパターンは，対面 1 と 6，対面 2 と 5，対面 3 と 4 のうち，2 組の対面が同色のときで，その対面の選び方は ${}_3\mathrm{C}_2=3$ 通りとなる。そして，このときの面と色との対応は $4!$ 通りずつある。

すると，4 色で塗り分けるときの確率は $\dfrac{3\times4!}{4^6}=\dfrac{9}{2^9}$ となる。

(i)(ii)より，4 色を用意したとき，立方体を塗り分ける確率 p_4 は，

$$p_4=\frac{3}{2^9}+\frac{9}{2^9}=\frac{3}{2^7}=\frac{3}{128}$$

(2)　$n\geqq6$ として，n 色 A_1，A_2，…，A_n を用意し，立方体の各面を塗るとき，n^6 通りの場合が同様に確からしいとする。

このとき，立方体を塗り分けるに必要な色数は，3, 4, 5, 6 であり，

(i)　3 色で塗るとき

3 色の選び方が ${}_n\mathrm{C}_3$ 通りで，塗り分けのパターンは，対面 1 と 6，対面 2 と 5，対面 3 と 4 が同色のときだけで 1 通りとなる。そして，このときの面と色との対応は $3!$ 通りずつある。すると，3 色で塗り分けるときの確率は，

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_3\times1\times3!}{n^6}=\frac{(n-1)(n-2)}{n^5}$$

(ii)　4 色で塗るとき

4 色の選び方が ${}_n\mathrm{C}_4$ 通りで，塗り分けのパターンは，対面 1 と 6，対面 2 と 5，対面 3 と 4 のうち，2 組の対面が同色のときで，その対面の選び方は ${}_3\mathrm{C}_2=3$ 通りとなる。そして，このときの面と色との対応は $4!$ 通りずつある。すると，4 色で塗り分けるときの確率は，

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_4\times 3\times 4!}{n^6}=\frac{3(n-1)(n-2)(n-3)}{n^5}$$

(iii) 5 色で塗るとき

5 色の選び方が ${}_n\mathrm{C}_5$ 通りで，塗り分けのパターンは，対面 1 と 6，対面 2 と 5，対面 3 と 4 のうち，1 組の対面が同色のときで，その対面の選び方は ${}_3\mathrm{C}_1=3$ 通りとなる。そして，このときの面と色との対応は $5!$ 通りずつある。すると，5 色で塗り分けるときの確率は，

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_5\times 3\times 5!}{n^6}=\frac{3(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{n^5}$$

(iv) 6 色で塗るとき

6 色の選び方が ${}_n\mathrm{C}_6$ 通りで，塗り分けのパターンは，同色の面はなく，面と色との対応は $6!$ 通りずつある。すると，6 色で塗り分けるときの確率は，

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_6\times 1\times 6!}{n^6}=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{n^5}$$

(i)～(iv)より，p_n は 4 つの場合の確率の和となり，

$$p_n=\frac{(n-1)(n-2)}{n^5}\{1+3(n-3)+3(n-3)(n-4)+(n-3)(n-4)(n-5)\}$$

$$=\frac{(n-1)(n-2)(n^3-9n^2+29n-32)}{n^5}=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{9}{n}+\frac{29}{n^2}-\frac{32}{n^3}\right)$$

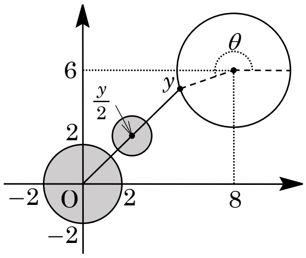
以上より，$\lim_{n\to\infty}p_n=1$ である。

［解　説］

塗り分けを題材にした確率に極限を融合した問題です。さいころと同じように各面に印をつけて考えています。なお，(2)では p_n を求めてしまいましたが，極限だけということなので，(iv)の場合のみでよかったと……。

$\boxed{2}$

問題のページへ



複素数 x, y に対して，

$$|x| \leqq 2 \cdots\cdots\cdots ①,\quad |y-(8+6i)| = 3 \cdots\cdots\cdots ②$$

②から，y は中心 $8+6i$ で半径 3 の円周を動き，

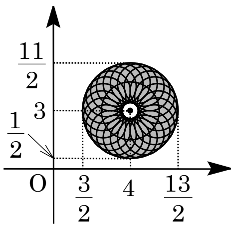
$$y = (8+3\cos\theta)+(6+3\sin\theta)i \cdots\cdots\cdots ③$$

さて，y の位置をいったん固定したとき，z は $z=\dfrac{x+y}{2}$ から $x = 2z-y$ となり，①に代入すると，

$$|2z-y| \leqq 2,\quad \left|z-\frac{y}{2}\right| \leqq 1 \cdots\cdots\cdots ④$$

④より，z は中心 $\dfrac{y}{2}$ で半径 1 の円の内部または周上を動く。そして，この領域を中心 $\dfrac{y}{2}$ の円板 D とする。

ここで，この状態を保ったまま，③を満たすように y の位置を動かすと，円板 D の中心 $\dfrac{y}{2}$ は，$\dfrac{y}{2} = \left(4+\dfrac{3}{2}\cos\theta\right)+\left(3+\dfrac{3}{2}\sin\theta\right)i$ となり，中心 $4+3i$ で半径 $\dfrac{3}{2}$ の円周上を動くことになる。



以上より，z が動く領域は右図の網点部となり，中心が $4+3i$ で，外径が $\dfrac{3}{2}+1=\dfrac{5}{2}$，内径が $\dfrac{3}{2}-1=\dfrac{1}{2}$ のドーナツ型である。

なお，境界は領域に含む。また，この領域の面積は，

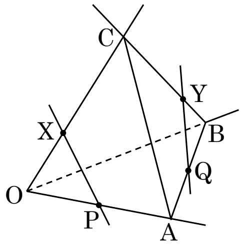
$$\pi\left(\frac{5}{2}\right)^2-\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}\pi-\frac{1}{4}\pi = 6\pi$$

［解　説］

複素数平面上の軌跡の問題です。1 文字固定して考えるタイプです。

3

問題のページへ



線分 OA, AB の中点を，それぞれ P, Q とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdots\cdots①,\ \ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdots\cdots②$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=x\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdots\cdots③$，$\overrightarrow{\mathrm{BY}}=y\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OY}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+y(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})=(1-y)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+y\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdots\cdots④$$

ここで，直線 QY と直線 PX がねじれの位置にない，すなわち同一平面上にあるとき，k, l を実数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{PY}}=k\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+l\overrightarrow{\mathrm{PX}},\ \ \overrightarrow{\mathrm{OY}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})+l(\overrightarrow{\mathrm{OX}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})\cdots\cdots\cdots⑤$$

⑤に①～④を代入して，

$$(1-y)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+y\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=k\Big(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\Big)+l\Big(x\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\Big)$$

$$-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-y)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+y\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\frac{1}{2}l\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2}k\overrightarrow{\mathrm{OB}}+lx\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ は 1 次独立なので，$-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}l$，$1-y=\frac{1}{2}k$，$y=lx$ となり，

$$l=1,\ \ k=2-2y,\ \ x=y$$

これより，直線 QY と直線 PX がねじれの位置にある条件は，$x\neq y$ である。

［解　説］

空間ベクトルの応用問題です。2 直線がねじれの位置にあることに関しては，同一平面上にない，または交わらず平行でもないという 2 方面からの処理が考えられますが，ここでは前者を採用しました。

$\boxed{4}$　　問題のページへ

自然数a_0に対して，数列a_0，a_1，a_2，…を，

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{2}\ (a_n\text{が偶数のとき}),\ a_{n+1}=\frac{3a_n+1}{2}\ (a_n\text{が奇数のとき})$$

(1)　a_0，a_1，a_2，a_3がすべて奇数であるとき，

$$a_1=\frac{3a_0+1}{2},\ a_2=\frac{3a_1+1}{2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{3a_0+1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{9a_0+5}{4}$$

$$a_3=\frac{3a_2+1}{2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{9a_0+5}{4}+\frac{1}{2}=\frac{27a_0+19}{8}$$

a_3が奇数であることが必要なので，このとき$27a_0+19$は 8 の倍数で 16 の倍数でない。すると，kを自然数として，$27a_0+19=16k-8$と表すことができ，

$$27a_0+27=16k,\ 27(a_0+1)=16k$$

27 と 16 は互いに素なので，a_0+1は 16 の倍数となり，最小の自然数a_0は，

$$a_0+1=16,\ a_0=15$$

逆に，$a_0=15$とき，$a_1=\frac{3\cdot15+1}{2}=23$，$a_2=\frac{9\cdot15+5}{4}=35$となり，$a_0$，$a_1$，$a_2$，$a_3$はすべて奇数である。

したがって，求める最小の自然数a_0は$a_0=15$である。

(2)　a_0，a_1，…，a_{10}がすべて奇数であるとき，$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 10$として，

$$a_{n+1}=\frac{3a_n+1}{2},\ a_{n+1}+1=\frac{3}{2}(a_n+1)$$

すると，$a_n+1=(a_0+1)\left(\frac{3}{2}\right)^n$となり，$a_n=(a_0+1)\left(\frac{3}{2}\right)^n-1$

a_{10}が奇数であることが必要なので，このとき$(a_0+1)\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$は偶数である。すると，$l$を自然数として，$(a_0+1)\left(\frac{3}{2}\right)^{10}=2l$と表すことができ，

$$(a_0+1)\cdot3^{10}=2^{11}l$$

3^{10}と2^{11}は互いに素なので，a_0+1は2^{11}の倍数となり，最小の自然数a_0は，

$$a_0+1=2^{11},\ a_0=2^{11}-1=2047$$

逆に，$a_0=2047$とき，$a_n=(2047+1)\left(\frac{3}{2}\right)^n-1=2^{11}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n-1=2^{11-n}\cdot3^n-1$

$1\leqq n\leqq9$のとき$2\leqq11-n\leqq10$より，$2^{11-n}\cdot3^n$は偶数となるので，a_0，a_1，…，a_{10}はすべて奇数である。

したがって，求める最小の自然数a_0は$a_0=2047$である。

［解　説］

漸化式と整数の融合問題です。(1)はa_3，(2)はa_{10}に着目して必要条件を求め，逆を確認するという同じ方法で解いています。

5

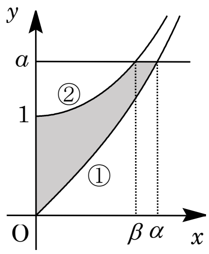
問題のページへ

(1)　$a \geqq 1$ のとき，領域 $D_a : x \geqq 0$，$\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \leqq y$，$y \leqq \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$，$y \leqq a$ について，

まず，$x \geqq 0$ において，境界線 $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ ……①に対し

$y' = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$，$y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ ……②に対し $y' = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \geqq 0$

となり，ともに単調に増加する。さらに，$\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} > \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ に注意すると，領域 D_a は右図の網点部となる。



そして，曲線①と直線 $y = a$ との交点を $x = \alpha$，曲線②と直線 $y = a$ との交点を $x = \beta$ とおくと，

$$\frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2} = a \cdots\cdots③,\quad \frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2} = a \cdots\cdots④$$

③より，$(e^{\alpha})^2 - 2ae^{\alpha} - 1 = 0$ となり，$e^{\alpha} > 0$ から $e^{\alpha} = a + \sqrt{a^2 + 1}$

$$\alpha = \log(a + \sqrt{a^2+1}),\quad e^{-\alpha} = e^{\alpha} - 2a = -a + \sqrt{a^2+1}$$

④より，$(e^{\beta})^2 - 2ae^{\beta} + 1 = 0$ となり，$e^{\beta} \geqq 1$ から $e^{\beta} = a + \sqrt{a^2 - 1}$

$$\beta = \log(a + \sqrt{a^2-1}),\quad e^{-\beta} = 2a - e^{\beta} = a - \sqrt{a^2-1}$$

すると，D_a の面積 S_a は，

$$S_a = a\alpha - \int_0^{\alpha} \frac{e^x - e^{-x}}{2}dx - \left\{ a\beta - \int_0^{\beta} \frac{e^x + e^{-x}}{2}dx \right\}$$

$$= a\alpha - \frac{1}{2}\Big[e^x + e^{-x} \Big]_0^{\alpha} - a\beta + \frac{1}{2}\Big[e^x - e^{-x} \Big]_0^{\beta}$$

$$= a(\alpha - \beta) - \frac{1}{2}(e^{\alpha} + e^{-\alpha} - 2) + \frac{1}{2}(e^{\beta} - e^{-\beta})$$

$$= a\log\frac{a + \sqrt{a^2+1}}{a + \sqrt{a^2-1}} - \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{a^2+1} + 1 + \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{a^2-1}$$

$$= a\log\frac{a + \sqrt{a^2+1}}{a + \sqrt{a^2-1}} + \sqrt{a^2-1} - \sqrt{a^2+1} + 1$$

(2)　まず，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}(\sqrt{a^2-1} - \sqrt{a^2+1} + 1) = \lim_{a\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{a^2-1} + \sqrt{a^2+1}} + 1 = 1$ ………⑤

また，$t = \dfrac{1}{a}$ とおくと，$a \to \infty$ のとき $t \to +0$ となり，

$$\lim_{a\to\infty} a\log\frac{a + \sqrt{a^2+1}}{a + \sqrt{a^2-1}} = \lim_{t\to+0}\frac{1}{t}\log\frac{\dfrac{1}{t} + \sqrt{\dfrac{1}{t^2}+1}}{\dfrac{1}{t} + \sqrt{\dfrac{1}{t^2}-1}} = \lim_{t\to+0}\frac{1}{t}\log\frac{1 + \sqrt{1+t^2}}{1 + \sqrt{1-t^2}}$$

ここで，$f(t) = \log\dfrac{1 + \sqrt{1+t^2}}{1 + \sqrt{1-t^2}} = \log(1 + \sqrt{1+t^2}) - \log(1 + \sqrt{1-t^2})$ とおくと，

$$f(0)=\log 2-\log 2=0$$

$$f'(t)=\frac{1}{1+\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}-\frac{1}{1+\sqrt{1-t^2}}\cdot\frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}$$

$$=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}+1+t^2}+\frac{t}{\sqrt{1-t^2}+1-t^2}$$

すると，$\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{1}{t}\log\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{1+\sqrt{1-t^2}}=\lim_{t\to+0}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=f'(0)=0$ となるので，

$$\lim_{a\to\infty}a\log\frac{a+\sqrt{a^2+1}}{a+\sqrt{a^2-1}}=0\cdots\cdots\cdots⑥$$

⑤⑥より，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}S_a=0+1=1$ である。

［解 説］

面積と極限の融合問題です。(1)では y 軸方向に積分をして面積を求めることもできますが，対数関数の積分になるため計算量は増えます。(2)の極限は，いわゆる $\infty\times0$ のタイプが現れますが，この解消ために微分の定義を利用しています。

6

問題のページへ

$a_k=2^{\sqrt{k}}$ に対して，a_k の整数部分が n 桁であるとき，$10^{n-1}\leqq 2^{\sqrt{k}}<10^n$ より，

$$\log_2 10^{n-1}\leqq \log_2 2^{\sqrt{k}}<\log_2 10^n,\ (n-1)\log_2 10\leqq \sqrt{k}<n\log_2 10$$

これより，$(n-1)^2(\log_2 10)^2\leqq k<n^2(\log_2 10)^2$ ………①

そして，①を満たす k の個数 N_n は，$(\log_2 10)^2$ が有理数でないことに注意して，

$$N_n=\left[n^2(\log_2 10)^2\right]-\left[(n-1)^2(\log_2 10)^2\right]\ \cdots\cdots\cdots②$$

すると，$n^2(\log_2 10)^2-1<\left[n^2(\log_2 10)^2\right]\leqq n^2(\log_2 10)^2$

$$(n-1)^2(\log_2 10)^2-1<\left[(n-1)^2(\log_2 10)^2\right]\leqq (n-1)^2(\log_2 10)^2$$

②より，$\{n^2-(n-1)^2\}(\log_2 10)^2-1<N_n<\{n^2-(n-1)^2\}(\log_2 10)^2+1$ となり，

$$(2n-1)(\log_2 10)^2-1<N_n<(2n-1)(\log_2 10)^2+1\ \cdots\cdots\cdots③$$

また，a_k の整数部分が n 桁で，その最高次の数字が 1 であるとき，

$$10^{n-1}\leqq 2^{\sqrt{k}}<2\cdot 10^{n-1}$$

同様にすると，$(n-1)\log_2 10\leqq \sqrt{k}<1+(n-1)\log_2 10$ となり，

$$(n-1)^2(\log_2 10)^2\leqq k<1+2(n-1)\log_2 10+(n-1)^2(\log_2 10)^2\ \cdots\cdots\cdots④$$

そして，④を満たす k の個数 L_n は，

$$L_n=\left[1+2(n-1)\log_2 10+(n-1)^2(\log_2 10)^2\right]-\left[(n-1)^2(\log_2 10)^2\right]\cdots\cdots\cdots⑤$$

⑤より，$1+2(n-1)\log_2 10-1<L_n<1+2(n-1)\log_2 10+1$ となり，

$$2(n-1)\log_2 10<L_n<2(n-1)\log_2 10+2\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

③⑥から，$\dfrac{2(n-1)\log_2 10}{(2n-1)(\log_2 10)^2+1}<\dfrac{L_n}{N_n}<\dfrac{2(n-1)\log_2 10+2}{(2n-1)(\log_2 10)^2-1}$ となり，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2(n-1)\log_2 10}{(2n-1)(\log_2 10)^2+1}=\frac{2\log_2 10}{2(\log_2 10)^2}=\frac{1}{\log_2 10}=\log_{10}2$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2(n-1)\log_2 10+2}{(2n-1)(\log_2 10)^2-1}=\frac{2\log_2 10}{2(\log_2 10)^2}=\frac{1}{\log_2 10}=\log_{10}2$$

したがって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{L_n}{N_n}=\log_{10}2$ である。

［解 説］

整数の個数と極限の融合問題です。極限については，まずアバウトに評価をして，その後，詰めの作業を行っています。なお，$(\log_2 10)^2$ が有理数でないことは，証明せずに使っています。ただ，この点が気になれば，N_n の②の個数や L_n の⑤の個数が 1 だけ大きくなったり，1 だけ小さくなったりすることも含め，③と⑥の評価式の範囲を少し拡大するという手もあります。