1　解答解説のページへ

次の各問いに答えよ。

(1)　xyz 空間の 3 点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ -1,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 2)$ を通る平面 α に関して点 $\mathrm{P}(1,\ 1,\ 1)$ と対称な点 Q の座標を求めよ。ただし，点 Q が平面 α に関して P と対称であるとは，線分 PQ の中点 M が平面 α 上にあり，直線 PM が P から平面 α に下ろした垂線となることである。

(2)　赤玉，白玉，青玉，黄玉が 1 個ずつ入った袋がある。よくかきまぜた後に袋から玉を 1 個取り出し，その玉の色を記録してから袋に戻す。この試行を繰り返すとき，n 回目の試行で初めて赤玉が取り出されて 4 種類すべての色が記録済みとなる確率を求めよ。ただし n は 4 以上の整数とする。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

曲線 $y=\frac{1}{2}(x^2+1)$ 上の点 P における接線は x 軸と交わるとし，その交点を Q とおく。線分 PQ の長さを L とするとき，L が取りうる値の最小値を求めよ。

3

解答解説のページへ

無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\frac{n\pi}{6}$ の和を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

曲線 $y=\log(1+\cos x)$ の $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分の長さを求めよ。

5

解答解説のページへ

xy 平面において，2 点 $\mathrm{B}(-\sqrt{3},\ -1)$，$\mathrm{C}(\sqrt{3},\ -1)$ に対し，点 A は次の条件(＊)を満たすとする。

(＊)　$\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\pi}{3}$ かつ点 A の y 座標は正

次の各問いに答えよ。

(1)　$\triangle\mathrm{ABC}$ の外心の座標を求めよ。

(2)　点 A が条件(＊)を満たしながら動くとき，$\triangle\mathrm{ABC}$ の垂心の軌跡を求めよ。

6

解答解説のページへ

次の各問いに答えよ。

(1) n を 2 以上の整数とする。$3^n - 2^n$ が素数ならば n も素数であることを示せ。

(2) a を 1 より大きい定数とする。微分可能な関数 $f(x)$ が $f(a) = af(1)$ を満たすとき，曲線 $y = f(x)$ の接線で原点$(0,\ 0)$を通るものが存在することを示せ。

1

問題のページへ

(1)　3 点 A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ -1,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 2)$を通る平面αの方程式は,

$$\frac{x}{1}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{2}=1,\ 2x-2y+z=2\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで, 点 Q は平面αに関して P$(1,\ 1,\ 1)$の対称点なので, αの法線ベクトルとして$\vec{n}=(2,\ -2,\ 1)$をとると, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} /\!/ \vec{n}$から実数$t$を用いて,

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\vec{n}=(1,\ 1,\ 1)+t(2,\ -2,\ 1)=(1+2t,\ 1-2t,\ 1+t)$$

すると, 線分 PQ の中点 M の座標が$\left(\dfrac{1+1+2t}{2},\ \dfrac{1+1-2t}{2},\ \dfrac{1+1+t}{2}\right)$, すなわち M$\left(1+t,\ 1-t,\ 1+\dfrac{t}{2}\right)$となり, M が平面$\alpha$上にあることから, $(*)$より,

$$2(1+t)-2(1-t)+\left(1+\frac{t}{2}\right)=2,\ \frac{9}{2}t-1=0,\ t=\frac{2}{9}$$

よって, 点 Q の座標は$\left(1+\dfrac{4}{9},\ 1-\dfrac{4}{9},\ 1+\dfrac{2}{9}\right)=\left(\dfrac{13}{9},\ \dfrac{5}{9},\ \dfrac{11}{9}\right)$である。

(2)　与えられた試行を繰り返し, n 回目の試行で初めて赤玉が取り出されて 4 種類すべての色が記録済みとなるのは, $n-1$回目までは白玉, 青玉, 黄玉がそれぞれ少なくとも 1 回取り出され, n 回目で赤玉が取り出される場合である。

まず, $n-1$回目までの試行について,

(i)　白玉のみ, 青玉のみ, 黄玉のみ取り出される確率　$\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}\times 3=3\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$

(ii)　白玉と青玉のみ, 白玉と黄玉のみ, 青玉と黄玉のみ取り出される確率

$$\left\{\left(\frac{2}{4}\right)^{n-1}-2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}\times 3=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-6\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

(i)(ii)より, 白玉, 青玉, 黄玉がそれぞれ少なくとも 1 回取り出される確率は,

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}-3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}-\left\{3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-6\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}=\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

そして, n 回目は赤玉が取り出されることより, 求める確率は,

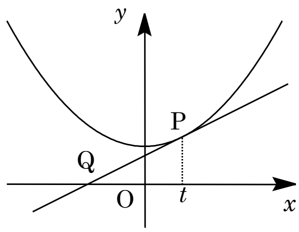
$$\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}\times\frac{1}{4}=\frac{3^{n-1}-3\cdot 2^{n-1}+3}{4^n}$$

［解 説］

(1)は空間図形の頻出題, (2)は確率の基本題です。(1)では, 平面の方程式を立てて処理しましたが, 普通にパラメータ表示しても構いません。

2

問題のページへ



曲線 $y=\frac{1}{2}(x^2+1)$ 上の点 $\mathrm{P}\left(t,\ \frac{1}{2}(t^2+1)\right)$ における接線の方程式は，$y'=x$ から，

$$y-\frac{1}{2}(t^2+1)=t(x-t),\quad y=tx-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}$$

x 軸との交点は，$tx-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}=0$ より，$t\neq 0$ として，

$$x=\frac{1}{2}t-\frac{1}{2t}$$

これより，$\mathrm{Q}\left(\frac{1}{2}t-\frac{1}{2t},\ 0\right)$ となり，$L=\mathrm{PQ}$ から，

$$L^2=\left(t-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2t}\right)^2+\frac{1}{4}(t^2+1)^2=\frac{1}{4}\left(t+\frac{1}{t}\right)^2+\frac{1}{4}(t^2+1)^2$$
$$=\frac{(t^2+1)^2}{4t^2}+\frac{1}{4}(t^2+1)^2=\frac{1}{4}(t^2+1)^2\left(\frac{1}{t^2}+1\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{(t^2+1)^3}{t^2}$$

ここで，$u=t^2>0$ とし，$L^2=f(u)$ とおくと，$f(u)=\frac{(u+1)^3}{4u}$ となり，

$$f'(u)=\frac{3(u+1)^2\cdot u-(u+1)^3}{4u^2}$$
$$=\frac{(u+1)^2(2u-1)}{4u^2}$$

u	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(u)$		$-$	0	$+$
$f(u)$		↘	$\frac{27}{16}$	↗

すると，$f(u)$ の増減は右表のようになり，$f(u)$ は最小値 $\frac{27}{16}$ をとる。

そして，$L=\sqrt{f(u)}$ から，L の最小値は $\sqrt{\frac{27}{16}}=\frac{3}{4}\sqrt{3}$ である。

［解 説］

微分と増減についての基本題です。難しい計算もありません。

3

問題のページへ

まず，$S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k\cos\frac{k\pi}{6}$ とおき，$z=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}i$ とすると，

$$z^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\cos\frac{n\pi}{6}+i\sin\frac{n\pi}{6}\right),\ \ \overline{z}^n=\overline{z^n}=\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\cos\frac{n\pi}{6}-i\sin\frac{n\pi}{6}\right)$$

すると，$S_n=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(z^k+\overline{z}^k)=\frac{1}{2}\left(\frac{1-z^{n+1}}{1-z}+\frac{1-\overline{z}^{n+1}}{1-\overline{z}}\right)\cdots\cdots\cdots(*)$

さて，$|z^n|=|\overline{z}^n|=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ から $\lim_{n\to\infty}|z^n|=\lim_{n\to\infty}|\overline{z}^n|=0$ となり，

$$\lim_{n\to\infty}z^n=\lim_{n\to\infty}\overline{z}^n=0$$

したがって，$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos\frac{n\pi}{6}=\lim_{n\to\infty}S_n$ より，(*)から，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos\frac{n\pi}{6}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-z}+\frac{1}{1-\overline{z}}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2-z-\overline{z}}{|1-z|^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(1-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2+\left(-\frac{1}{4}\right)^2}$$

$$=\frac{4-\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}}=\frac{(4-\sqrt{3})(5+2\sqrt{3})}{25-12}=\frac{14+3\sqrt{3}}{13}$$

［解　説］

無限級数の和を求める頻出題です。たとえば，第 $6n+5$ 項までの部分和を計算し，それをもとに詰めを行い，極限を計算する方法もあります。ただ，ここは複素数の出番で，上の解答例が標準的でしょう。

4

問題のページへ

曲線 $y=\log(1+\cos x)$ に対し，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分の長さを l とすると，

$$1+(y')^2 = 1+\left(\frac{-\sin x}{1+\cos x}\right)^2 = \frac{(1+\cos x)^2+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2} = \frac{2+2\cos x}{(1+\cos x)^2}$$
$$= \frac{2}{1+\cos x} = \frac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}$$

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，$\sqrt{1+(y')^2} = \dfrac{1}{\sqrt{\cos^2\dfrac{x}{2}}} = \dfrac{1}{\left|\cos\dfrac{x}{2}\right|} = \dfrac{1}{\cos\dfrac{x}{2}}$ となり，

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos\dfrac{x}{2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\dfrac{x}{2}}{1-\sin^2\dfrac{x}{2}}dx$$

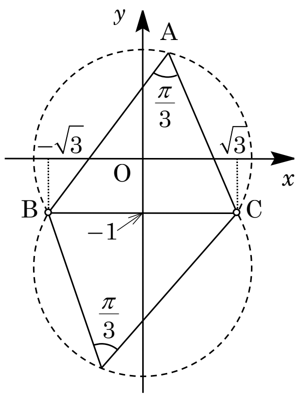
そこで，$t=\sin\dfrac{x}{2}$ とおくと，$dt=\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}dx$ となり，

$$l = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{2}{1-t^2}dt = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)dt = \left[\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \log\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$$
$$= \log\frac{(2+\sqrt{2})^2}{2} = \log(3+2\sqrt{2})$$

［解 説］

曲線の長さを求める基本題です。

$\boxed{5}$　問題のページへ



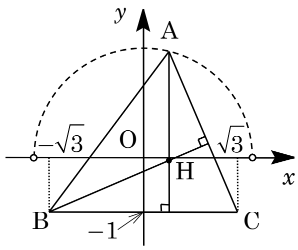
(1)　点$B(-\sqrt{3},\ -1)$，$C(\sqrt{3},\ -1)$に対し，$\angle BAC=\dfrac{\pi}{3}$を満たす点Aは，右図の破線で示した2定点B, Cから見込む角が$\dfrac{\pi}{3}$の円弧上の点である。さらに，点Aはy座標が正なのでx軸の上側に位置する。

このとき，△ABCの外接円の半径をRとおくと，正弦定理より，

$$\frac{BC}{\sin\frac{\pi}{3}}=2R,\quad R=\frac{2\sqrt{3}}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=2$$

すると，△ABCの外心は，辺BCの垂直二等分線すなわちy軸上にあり，直線BCの上側で，頂点Bからの距離が2の点である。

したがって，外心は$O(0,\ 0)$である。



(2)　△ABCの外接円は，$x^2+y^2=4$と表されるので，頂点$A(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$とおく。ただし，$0<\theta<\pi$である。

このとき，△ABCの垂心Hを$H(x,\ y)$とおくと，直線AHの方程式は，

$$x=2\cos\theta\ \cdots\cdots\cdots①$$

また，$\overrightarrow{CA}=(2\cos\theta-\sqrt{3},\ 2\sin\theta+1)$より，直線BHの方程式は，

$$(2\cos\theta-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})+(2\sin\theta+1)(y+1)=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

①を②に代入して，$(2\cos\theta-\sqrt{3})(2\cos\theta+\sqrt{3})+(2\sin\theta+1)(y+1)=0$となり，

$$4\cos^2\theta-3+(2\sin\theta+1)(y+1)=0,\quad 1-4\sin^2\theta+(2\sin\theta+1)(y+1)=0$$

$$(1+2\sin\theta)(1-2\sin\theta)+(2\sin\theta+1)(y+1)=0$$

$1+2\sin\theta>0$より，$1-2\sin\theta+(y+1)=0$となり，

$$y=2\sin\theta-2\ \cdots\cdots\cdots③$$

①③より，$\left(\dfrac{x}{2}\right)^2+\left(\dfrac{y+2}{2}\right)^2=1$となり，$x^2+(y+2)^2=4$

ただし，$0<\theta<\pi$より，$-2<x<2$，$-2<y\leqq 0$となる。

以上より，垂心Hの軌跡は，半円:$x^2+(y+2)^2=4\ (y>-2)$である。

［解　説］

三角形の外心と垂心を題材にした問題です。(2)では，①②を連立して軌跡を求める際に，見通しを立てながら計算を進める必要があります。

$\boxed{6}$

問題のページへ

(1)　以下，2 以上の整数 n が素数でないならば，3^n-2^n は素数でないことを示す。

まず，n が素数でないことより，2 以上の整数 $p,\ q$ を用いて，$n=pq$ と表されるとすると，

$$3^n-2^n=3^{pq}-2^{pq}=(3^p)^q-(2^p)^q$$
$$=(3^p-2^p)\{(3^p)^{q-1}+(3^p)^{q-2}(2^p)+\cdots+(2^p)^{q-1}\}$$

ここで，$3^p-2^p=(2+1)^p-2^p={}_p\mathrm{C}_1 2^{p-1}+{}_p\mathrm{C}_2 2^{p-2}+\cdots+1\geqq 2\cdot 2^1+1=5$

$$(3^p)^{q-1}+(3^p)^{q-2}(2^p)+\cdots+(2^p)^{q-1}\geqq 3^2+2^2=13$$

これより，n が素数でないならば，3^n-2^n は素数でない。

よって，対偶を考えると，3^n-2^n が素数ならば n も素数である。

(2)　$a>1$ のとき，微分可能な関数 $f(x)$ について，$f(a)=af(1)$ ………①

このとき，$x>0$ において，$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ と定義すると，

$$g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}\ \cdots\cdots\cdots②$$

さて，区間 $1\leqq x\leqq a$ において，平均値の定理より，

$$\frac{g(a)-g(1)}{a-1}=g'(c)\quad(1<c<a)\ \cdots\cdots\cdots③$$

①②③から，$\dfrac{cf'(c)-f(c)}{c^2}=\dfrac{1}{a-1}\left\{\dfrac{f(a)}{a}-\dfrac{f(1)}{1}\right\}=\dfrac{f(a)-af(1)}{(a-1)a}=0$ となり，

$$cf'(c)-f(c)=0\ \cdots\cdots\cdots④$$

ここで，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(c,\ f(c))$ における接線の方程式は，

$$y-f(c)=f'(c)(x-c),\quad y=f'(c)x-cf'(c)+f(c)\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

すると，接線⑤は，④から $y=f'(c)x$ となり，原点を通る。

［解 説］

(1)は整数を題材とした論証問題で，対偶に着目することがポイントです。(2)は発見的方法が要求される論証問題で，難度の高いものです。結論を導くための式④をみて，$g(x)$ を思いつくかどうかが問われています。