1

問題のページへ

[1]　1 から 9 までの番号を 1 つずつ書いた 9 枚のカードから，2 枚のカードを同時に選ぶとき，小さい方の数が k であるのは，大きい方の数が $k+1$ 以上のときなので，$9-k$ 通りの場合がある。

これより，$1\leqq k\leqq 8$ のとき，$X=Y=k$ である確率 $P(k)$ は，

$$P(k)=\frac{9-k}{{}_9\mathrm{C}_2}\times\frac{9-k}{{}_9\mathrm{C}_2}=\frac{(9-k)^2}{36^2}$$

よって，$X=Y$ である確率は，

$$\sum_{k=1}^{8}P(k)=\frac{1}{36^2}\sum_{k=1}^{8}(9-k)^2=\frac{1}{36^2}\sum_{k=1}^{8}k^2=\frac{1}{36^2}\cdot\frac{1}{6}\cdot 8\cdot 9\cdot 17=\frac{17}{108}$$

[2]　$I=\int_0^{\frac{1}{2}}(x+1)\sqrt{1-2x^2}\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}x\sqrt{1-2x^2}\,dx+\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-2x^2}\,dx$ とする。

$1-2x^2=t$ とおくと，$-4x\,dx=dt$ となり，

$$\int_0^{\frac{1}{2}}x\sqrt{1-2x^2}\,dx=-\frac{1}{4}\int_1^{\frac{1}{2}}\sqrt{t}\,dt=\frac{1}{4}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{t}\,dt=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\Big[\,t\sqrt{t}\,\Big]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$=\frac{1}{6}\Big(1-\frac{\sqrt{2}}{4}\Big)=\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{2}}{24}$$

$\sqrt{2}x=\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$\sqrt{2}\,dx=\cos\theta\,d\theta$ となり，

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-2x^2}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,d\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2\theta)\,d\theta=\frac{\sqrt{2}}{4}\Big[\,\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\Big(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\Big)=\frac{\sqrt{2}}{16}\pi+\frac{\sqrt{2}}{8}$$

よって，$I=\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{2}}{24}+\frac{\sqrt{2}}{16}\pi+\frac{\sqrt{2}}{8}=\frac{\sqrt{2}}{16}\pi+\frac{\sqrt{2}}{12}+\frac{1}{6}$

[解　説]

[1]は文系と共通の確率の基本問題です。[2]は定積分の計算問題です。後半は円の面積と関連させてもよいでしょう。

2

問題のページへ

行列$\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & c \end{pmatrix}$によって表される１次変換$T$において，条件(i)より，

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

よって，$a+2=1$……①，$b+2c=2$……②

Tによって，点$(1,\ 0)$は点$\mathrm{A}(a,\ b)$に，点$(0,\ 1)$は$\mathrm{B}(1,\ c)$に移り，条件(ii)より，

$$\frac{1}{2}|ac-b|=\frac{1}{2},\ ac-b=\pm1\ \cdots\cdots\cdots③$$

①より，$a=-1$となり，③に代入すると，$-c-b=\pm1$………④

②④より，$c=3$のとき$b=-4$，$c=1$のとき$b=0$であるので，

$$(a,\ b,\ c)=(-1,\ -4,\ 3),\ (-1,\ 0,\ 1)$$

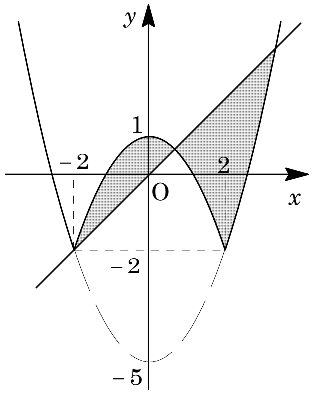
[解 説]

１次変換の定義の理解を確認する問題です。

3

問題のページへ

直線 $y=x$ ……①と $y=\left|\dfrac{3}{4}x^2-3\right|-2$ のグラフに対して,



(i)　$x\leqq -2$，$2\leqq x$ のとき

$$y=\frac{3}{4}(x^2-4)-2=\frac{3}{4}x^2-5 \text{………②}$$

$y=x$ と連立すると，$x=\dfrac{3}{4}x^2-5$ から,

$$3x^2-4x-20=0,\ (x+2)(3x-10)=0$$

よって，$x=-2,\ \dfrac{10}{3}$ となる。

(ii)　$-2\leqq x\leqq 2$ のとき

$$y=-\frac{3}{4}(x^2-4)-2=-\frac{3}{4}x^2+1 \text{………③}$$

$y=x$ と連立すると，$x=-\dfrac{3}{4}x^2+1$ から，$3x^2+4x-4=0$，$(x+2)(3x-2)=0$

よって，$x=-2,\ \dfrac{2}{3}$ となる。

さて，直線①と曲線②に囲まれる図形の面積を S_1 とおくと,

$$S_1=\int_{-2}^{\frac{10}{3}}\left(x-\frac{3}{4}x^2+5\right)dx=-\frac{3}{4}\int_{-2}^{\frac{10}{3}}\left(x-\frac{10}{3}\right)(x+2)\,dx$$

$$=-\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{10}{3}+2\right)^3=\frac{512}{27}$$

また，直線①と曲線③に囲まれる図形の面積を S_2 とおくと,

$$S_2=\int_{-2}^{\frac{2}{3}}\left(-\frac{3}{4}x^2+1-x\right)dx=-\frac{3}{4}\int_{-2}^{\frac{2}{3}}\left(x-\frac{2}{3}\right)(x+2)\,dx$$

$$=-\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{2}{3}+2\right)^3=\frac{64}{27}$$

さらに，直線 $y=-2$ と曲線③に囲まれる図形の面積を S_3 とおくと,

$$S_3=\int_{-2}^{2}\left(-\frac{3}{4}x^2+1+2\right)dx=-\frac{3}{4}\int_{-2}^{2}(x-2)(x+2)\,dx$$

$$=-\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{6}\right)(2+2)^3=8$$

以上より，$y=x$ と $y=\left|\dfrac{3}{4}x^2-3\right|-2$ のグラフによって囲まれる図形の面積 S は,

$$S=S_1+2S_2-2S_3=\frac{512}{27}+\frac{128}{27}-16=\frac{208}{27}$$

[解 説]

いわゆる $\dfrac{1}{6}$ 公式だけで面積計算の可能な有名な頻出問題です。もちろん，普通に計算しても構いません。

4

問題のページへ

$n \geqq 2$ のとき，$\dfrac{1}{2} < a_j < 1$　($j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$) に対して，不等式

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n) > 1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{2^{n-1}}\right)\cdots\cdots\cdots(*)$$

が成り立つことを，以下，数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n = 2$ のとき　$\dfrac{1}{2} < a_1 < 1$，$\dfrac{1}{2} < a_2 < 1$ に対して，

$$(1-a_1)(1-a_2)-1+\left(a_1+\frac{a_2}{2}\right) = a_1a_2-\frac{a_2}{2} = a_2\left(a_1-\frac{1}{2}\right) > 0$$

よって，不等式(＊)は成立する。

(ii)　$n = k$ のとき　$\dfrac{1}{2} < a_j < 1$　($j = 1,\ 2,\ \cdots,\ k$) に対して，

不等式 $(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_k) > 1-\left(a_1+\dfrac{a_2}{2}+\cdots+\dfrac{a_k}{2^{k-1}}\right)$ の成立を仮定する。

さて，$\dfrac{1}{2} < a_{k+1} < 1$ に対して，

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_k)(1-a_{k+1})-1+\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}+\frac{a_{k+1}}{2^k}\right)$$

$$> \left\{1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}\right)\right\}(1-a_{k+1})-1+\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}+\frac{a_{k+1}}{2^k}\right)$$

$$= -a_{k+1}+\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}\right)a_{k+1}+\frac{a_{k+1}}{2^k}$$

$$= \left(-1+a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}+\frac{1}{2^k}\right)a_{k+1}$$

$$> \left(-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}\right)a_{k+1}$$

ここで，$-1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^k}+\dfrac{1}{2^k} = -1+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^k}{1-\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{2^k} = 0$ より，

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_k)(1-a_{k+1}) > 1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}+\frac{a_{k+1}}{2^k}\right)$$

(i)(ii)より, $n \geqq 2$ のとき，$\dfrac{1}{2} < a_j < 1$ に対して，不等式(＊)が成立する。

[解 説]

数学的帰納法による不等式の証明問題です。予想よりはるかにスッキリ示せます。

5

問題のページへ

原点Oを中心とする半径$\sqrt{6}$の球面Sの方程式は,

$$x^2+y^2+z^2=6 \cdots\cdots\cdots①$$

3点$(4,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 4,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 4)$を通る平面αの方程式は,

$$x+y+z=4 \cdots\cdots\cdots②$$

さて，球面Sの中心Oと平面αの距離dは，$d=\dfrac{|-4|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

よって，$4<\sqrt{18}$から，$d=\dfrac{4}{\sqrt{3}}<\sqrt{6}$となり，球面$S$と平面$\alpha$は共有点をもつ。

ここで，①②をともに満たすx, y, zに対して，$xyz=k \cdots\cdots③$とおく。

①②より，$xy+yz+zx=\dfrac{1}{2}\left\{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)\right\}=5 \cdots\cdots\cdots④$

すると，②③④より, x, y, zはuに関する3次方程式$u^3-4u^2+5u-k=0$，すなわち$u^3-4u^2+5u=k \cdots\cdots⑤$の3つの実数解としてみることができる。

さらに，⑤をuv平面上でとらえなおし,

$$v=u^3-4u^2+5u \cdots\cdots\cdots⑥,\quad v=k \cdots\cdots\cdots⑦$$

これより，kの値の範囲は，曲線⑥と直線⑦が3個の共有点(接点は2個とみなす)をもつ条件として求めることができる。

⑥より，$v'=3u^2-8u+5=(3u-5)(u-1)$

曲線⑥の増減は右表のようになり，曲線⑥とu軸に平行な直線⑦の共有点が3個(接点は2個とみなす)となるkの条件は，$\dfrac{50}{27}\leqq k\leqq 2$であるので,

u	$\cdots$	1	$\cdots$	$\dfrac{5}{3}$	$\cdots$
v'	$+$	0	$-$	0	$+$
v	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\dfrac{50}{27}$	$\nearrow$

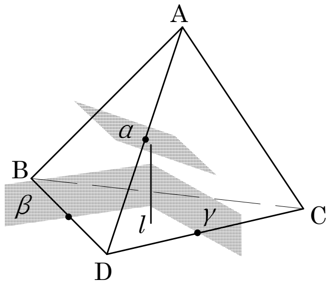
$$\frac{50}{27}\leqq xyz\leqq 2$$

[解 説]

導入は空間図形ですが，内容は，条件付きの最大・最小問題です。頻出題なので，演習は必須です。

6

問題のページへ



一般的に，空間の異なる 2 定点 P，Q から等距離にある点は，線分 PQ の垂直二等分面を描く。

さて，辺 DA, DB, DC の垂直二等分面をそれぞれα，β，γとすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{DA}}\perp\alpha,\ \overrightarrow{\mathrm{DB}}\perp\beta,\ \overrightarrow{\mathrm{DC}}\perp\gamma$$

$\overrightarrow{\mathrm{DB}}$と$\overrightarrow{\mathrm{DC}}$は平行ではないので，平面$\beta$と$\gamma$は平行ではない。これより，平面$\beta$と$\gamma$の交線が存在する。この交線を$l$とし，$l$の方向ベクトルを$\vec{u}$とおく。

直線lは平面β上にあり，しかも平面γ上にあるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{DB}}\perp\vec{u},\ \overrightarrow{\mathrm{DC}}\perp\vec{u}$$

ここで，直線lと平面αが平行であると仮定すると，$\overrightarrow{\mathrm{DA}}\perp\vec{u}$である。しかし，このとき 4 点 A, B, C, D は同一平面上にあることになり，条件に反する。

したがって，直線lと平面αは平行でなく，交点が存在する。この交点を O とすると，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\mathrm{OD}$である。

すなわち，点 O を中心とし，4 つの頂点 A, B, C, D を同時に通る球面が存在する。

[解 説]

いろいろな手段によって，証明することができそうです。上の解答例は最初に考えたものです。