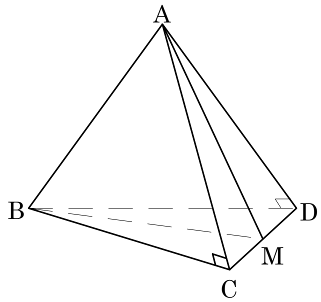
1

問題のページへ

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とおく。



まず，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=0$ となり，

$$-\vec{c}\cdot(\vec{b}-\vec{c})=0,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{c}|^2\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{DA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{DB}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{DA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DB}}=0$ となり，

$$-\vec{d}\cdot(\vec{b}-\vec{d})=0,\ \vec{b}\cdot\vec{d}=|\vec{d}|^2\cdots\cdots\cdots②$$

さらに，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$ となり，

$$\vec{b}\cdot(\vec{d}-\vec{c})=0,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{d}\cdots\cdots\cdots③$$

①②③より，$|\vec{c}|^2=|\vec{d}|^2=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{d}\cdots\cdots\cdots④$

さて，辺 CD の中点 M に対して，$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d})$ と表せるので，④より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d})\cdot(\vec{d}-\vec{c})=\frac{1}{2}(|\vec{d}|^2-|\vec{c}|^2)=0$$

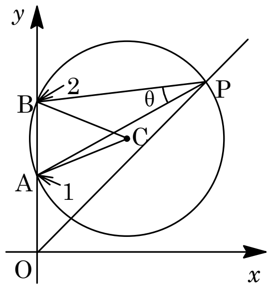
よって，$\overrightarrow{\mathrm{AM}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ となり，条件の $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ と考え合わせると，3 点 A，B，M を通る平面は，辺 CD と直交する。

[解　説]

四面体を題材にした空間ベクトルの頻出題です。

2

問題のページへ

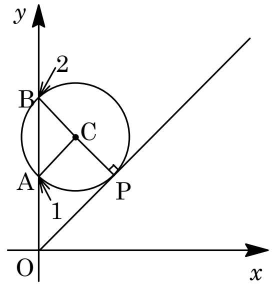


3 点 A$(0,\ 1)$，B$(0,\ 2)$，P$(x,\ x)$を通る円の中心 C は，弦 AB の垂直二等分線上にあることより，$t>0$ として，C$\left(t,\ \dfrac{3}{2}\right)$とおくことができる。

また，$\angle\mathrm{APB}=\theta$ とおくと，$0<\angle\mathrm{ACB}<\pi$ から $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ となる。

さて，円 C の半径を r とおくと，正弦定理より，

$$\frac{\mathrm{AB}}{\sin\theta}=2r\,,\ \ \sin\theta=\frac{1}{2r}\ \cdots\cdots\cdots(*)$$



すると，θ が最大値をとるのは，(*)より r が最小，すなわち円 C が点 P の軌跡である半直線 $y=x\ (x>0)$ と接するときであり，

$$\sqrt{t^2+\left(\frac{3}{2}-1\right)^2}=\frac{\left|t-\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}\,,\ \ t^2+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\left(t-\frac{3}{2}\right)^2$$

まとめると，$4t^2+12t-7=0$，$(2t-1)(2t+7)=0$

$t>0$ より $t=\dfrac{1}{2}$ となり，このとき C$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$である。

すると，$\angle\mathrm{ACB}=\dfrac{\pi}{2}$ となり，$\angle\mathrm{APB}$ の最大値は $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{4}$ である。

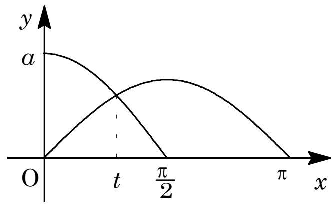
[解　説]

AB を弦とする円を設定し，図形的に，そして感覚的に解きました。なお，円の中心は, AB を直径とする円が半直線 $y=x\ (x>0)$ と共有点をもたないことから，第 1 象限にあることがわかります。また, 2 直線のなす角のタンジェントを，加法定理を用いて数式化する解法もあります。

3

問題のページへ

曲線 $y=\sin x\ (0\leqq x\leqq \pi)$ と x 軸とで囲まれた図形の面積 S は,



$$S=\int_0^{\pi}\sin x\,dx=-\Big[\cos x\Big]_0^{\pi}=2\ \cdots\cdots\cdots①$$

また，$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ における曲線 $y=\sin x$，$y=a\cos x$ の交点を $x=t$ とおくと,

$$\sin t=a\cos t\ \cdots\cdots\cdots②$$

すると, 2 曲線 $y=\sin x$，$y=a\cos x$ と x 軸で囲まれた図形の面積 T は,

$$T=\int_0^{t}\sin x\,dx+\int_t^{\frac{\pi}{2}}a\cos x\,dx=-\Big[\cos x\Big]_0^{t}+a\Big[\sin x\Big]_t^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\cos t+1+a(1-\sin t)=-a\sin t-\cos t+a+1\ \cdots\cdots\cdots③$$

さて，条件より $S:T=3:1$ なので，$S=3T$ となり，①③から,

$$2=3(-a\sin t-\cos t+a+1),\ 3a\sin t+3\cos t-3a-1=0\ \cdots\cdots\cdots④$$

②④より，$3(a^2+1)\cos t=3a+1$ となり,

$$\cos t=\frac{3a+1}{3(a^2+1)},\ \sin t=\frac{a(3a+1)}{3(a^2+1)}\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

⑤を，$\sin^2 t+\cos^2 t=1$ に代入すると，$\dfrac{a^2(3a+1)^2}{9(a^2+1)^2}+\dfrac{(3a+1)^2}{9(a^2+1)^2}=1$

$$\frac{(3a+1)^2}{9(a^2+1)}=1,\ 9a^2+6a+1=9a^2+9$$

よって，$a=\frac{4}{3}$ となり，この値は $a>0$ を満たす。

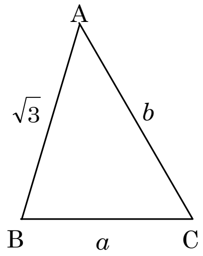
[解 説]

交点の x 座標を文字でおき，その条件②を用いて，間接的に解き進めるタイプの有名問題です。演習必須の 1 題です。

4

問題のページへ

外接円の半径が 1 である鋭角三角形 ABC において，$\mathrm{AB}=\sqrt{3}$，$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$ とおくと，正弦定理より，



$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}}{\sin C}=2\times 1$$

$$\sin A=\frac{a}{2}\cdots\cdots①,\ \sin B=\frac{b}{2}\cdots\cdots②,\ \sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdots\cdots③$$

③より，∠C が鋭角から，$C=\dfrac{\pi}{3}$ ………④

①より, $1<a<2$ から $\dfrac{1}{2}<\sin A<1$ となり，∠A が鋭角から $\dfrac{\pi}{6}<A<\dfrac{\pi}{2}$ ………⑤

④⑤より，$B=\dfrac{2}{3}\pi-A$ から $\dfrac{\pi}{6}<B<\dfrac{\pi}{2}$ となり，∠B が鋭角という条件は満たされる。

さて，①より，$\cos A=\sqrt{1-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{1-\dfrac{a^2}{4}}$ となり，②から，

$$b=2\sin B=2\sin\left(\frac{2}{3}\pi-A\right)=2\sin\frac{2}{3}\pi\cos A-2\cos\frac{2}{3}\pi\sin A$$

$$=\sqrt{3}\cdot\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}+\frac{a}{2}=\frac{a+\sqrt{3(4-a^2)}}{2}$$

[解 説]

正弦定理の利用から始めるという点はすぐにわかるものの，その後の解法の選択に，運・不運が反映されます。

5

問題のページへ

(1)　$a=2^n$ とするとき，3^a-1 は 2^{n+2} で割り切れるが 2^{n+3} では割り切れないことを数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=1$ のとき

$a=2$ より $3^a-1=8$ となり，2^{1+2} では割り切れるが 2^{1+3} では割り切れない。

(ii)　$n=k$ のとき

$a=2^k$ とするとき，3^a-1 は 2^{k+2} で割り切れるが 2^{k+3} では割り切れない，すなわち l を奇数として，$3^{2^k}-1=l\cdot 2^{k+2}$ と仮定する。このとき，

$$3^{2^{k+1}}-1=3^{2^k\cdot 2}-1=(3^{2^k})^2-1=(3^{2^k}-1)(3^{2^k}+1)$$
$$=l\cdot 2^{k+2}(l\cdot 2^{k+2}+2)=l\cdot 2^{k+3}(l\cdot 2^{k+1}+1)$$

ここで，l および $l\cdot 2^{k+1}+1$ はともに奇数なので，$3^{2^{k+1}}-1$ は 2^{k+3} で割り切れるが 2^{k+4} では割り切れない。

(i)(ii)より，$3^{2^n}-1$ は 2^{n+2} で割り切れるが 2^{n+3} では割り切れない。

(2)　m は正の偶数より, L を正の奇数として，$m=L\cdot 2^n=L\cdot a$ とおくことができる。

$$3^m-1=3^{L\cdot a}-1=(3^a)^L-1=(3^a-1)\{(3^a)^{L-1}+(3^a)^{L-2}+\cdots+3^a+1\}$$

ここで，(1)より，3^a-1 は 2^{n+2} で割り切れるが 2^{n+3} では割り切れない。さらに, 3^a は奇数であるので, L 項の奇数の和 $(3^a)^{L-1}+(3^a)^{L-2}+\cdots+3^a+1$ も奇数となることを考え合わせると，3^m-1 は 2^{n+2} で割り切れるが 2^{n+3} では割り切れない。

よって, M を奇数として，$3^m-1=M\cdot 2^{n+2}$ と表すことができる。

さて，条件より，3^m-1 は 2^m で割り切れるので,

$$n+2\geqq m=L\cdot 2^n,\quad L\leqq\frac{n+2}{2^n}\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

そこで，$f(n)=\dfrac{n+2}{2^n}$ とおくと，$n\geqq 3$ で $f(n)<1$ であり, $(*)$を満たす正の奇数 L は存在しない。また，$f(1)=\dfrac{3}{2}$，$f(2)=1$ から，$(*)$を満たす $(L,\ n)$ の組は, $(L,\ n)=(1,\ 1)$，$(1,\ 2)$ のみとなる。

このとき m の値は，それぞれ $m=1\cdot 2^1=2$，$m=1\cdot 2^2=4$ である。

[解 説]

正の整数を 2 で割っていくと，その商がいつかは, 1 も含めて，奇数となるということを利用した解法です。難問なので，本問だけが誘導形式になっています。なお, $f(n)$ の値については, 1 次関数と指数関数のグラフを比較して結論を導いています。

6

問題のページへ

まず, n 個のボールを $2n$ 個の箱へ投げ入れる $(2n)^n$ 通りの場合が同様に確からしいとする。

このとき, どの箱にも 1 個以下のボールしか入っていない場合は, ${}_{2n}\mathrm{P}_n$ 通りあるので, その確率 p_n は,

$$p_n = \frac{{}_{2n}\mathrm{P}_n}{(2n)^n} = \frac{1}{2^n}\cdot\frac{2n}{n}\cdot\frac{2n-1}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-n+2}{n}\cdot\frac{2n-n+1}{n}$$
$$= \frac{1}{2^n}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{n+n-1}{n}\cdot\frac{n+n}{n}$$
$$= \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\left(1+\frac{n}{n}\right)$$

すると, $\log p_n = \log\frac{1}{2^n} + \log\left(1+\frac{1}{n}\right) + \log\left(1+\frac{2}{n}\right) + \cdots + \log\left(1+\frac{n-1}{n}\right) + \log\left(1+\frac{n}{n}\right)$

となり,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log p_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{-n\log 2 + \sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)\right\} = -\log 2 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)$$
$$= -\log 2 + \int_0^1 \log(1+x)\,dx = -\log 2 + \Big[(1+x)\log(1+x)\Big]_0^1 - \int_0^1 dx$$
$$= -\log 2 + 2\log 2 - 1 = \log 2 - 1$$

[解 説]

出題頻度が高いとは言えませんが, ときどき見かける確率と区分求積の融合問題です。本問も演習必須の 1 題です。